المتتاليات

التمرين 2

تمرين :

نعتبر المتتاليةالعددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المعرفة بما يلي :** $\begin{cases} u_0 = \dfrac{9}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{10u_n - 16}{u_n + 2} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) بين بالترجع : $u_n > 4 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) أدرس رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **و استنتج أن** $u_n \leq \dfrac{9}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

3) استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متقاربة**

4) لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المتتالية العددية المعرفة بما يلي :** $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 4}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

أ. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متتالية حسابية محددا أساسها و حدها الأول**

ب. أكتب v_n **بدلالة** n **و استنتج** u_n **بدلالة** n

ج. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

د. نضع $w_n = \ln(u_n)$ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

التصحيح

(1

- **من أجل** $n = 0$ **: لدينا** $u_0 = \dfrac{9}{2}$ **إذن** $u_0 > 4$

- **ليكن** $n \in \mathbb{N}$ **:**
  - ✓ **نفترض أن :** $u_n > 4$
  - ✓ **و نبين أن :** $u_{n+1} > 4$

لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-4 &= \frac{10u_n-16}{u_n+2}-4 \\ &= \frac{10u_n-16-4u_n-8}{u_n+2} \\ &= \frac{6u_n-24}{u_n+2} \\ &= \frac{6(u_n-4)}{u_n+2} \end{aligned}$$

حسب الإفتراض لدينا : $u_n > 4$ **إذن** $u_n - 4 > 0$ **و** $u_n + 2 > 0$ **و منه** $\frac{6(u_n-4)}{u_n+2} > 0$

إذن : $u_{n+1}-4>0$ **و بالتالي :** $u_{n+1} > 4$

- **نستنتج : :** $u_n > 4 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) **ليكن** $n \in \mathbb{N}$:

-

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{10u_n-16}{u_n+2}-u_n \\ &= \frac{10u_n-16-u_n^2-2u_n}{u_n+2} \\ &= \frac{-u_n^2+8u_n-16}{u_n+2} \\ &= \frac{-(u_n-4)^2}{u_n+2} \end{aligned}$$

بما أن $\frac{-(u_n-4)^2}{u_n+2} < 0$ **فإن** $u_{n+1}-u_n < 0$

إذن : $u_{n+1} < u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

و منه المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تناقصية قطعا**

- **بما أن** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تناقصية فإن :** $u_n \le u_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

و منه $u_n \le \frac{9}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

3) **بما أن** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تناقصية و مصغورة (بالعدد 4) فإن** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متقاربة**

4)

أ. **ليكن** $n\in\mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-4} \\
&= \frac{\dfrac{10u_n-16}{u_n+2}}{\dfrac{6(u_n-4)}{u_n+2}} \\
&= \frac{10u_n-16}{6(u_n-4)} \\
&= \frac{5u_n-8}{3(u_n-4)}
\end{aligned}
$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{5u_n-8}{3(u_n-4)}-\frac{u_n}{u_n-4}=\frac{5u_n-8-3u_n}{3(u_n-4)}=\frac{2u_n-8}{3(u_n-4)}=\frac{2(u_n-4)}{3(u_n-4)}=\frac{2}{3}$$

إذن $v_{n+1}-v_n=\frac{2}{3}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

و بالتالي المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **حسابية أساسها** $r=\frac{2}{3}$ **و حدها الأول** $v_0=\frac{u_0}{u_0-4}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{2}-4}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{1}{2}}=9$

ب.

- **لدينا :** $(\forall n\in\mathbb{N})\quad v_n=v_0+nr$

  إذن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad v_n=9+\frac{2n}{3}$
- **ليكن** $n\in\mathbb{N}$:

  لدينا :

$$v_n = \frac{u_n}{u_n - 4}$$
$$\Leftrightarrow (u_n - 4)v_n = u_n$$
$$\Leftrightarrow u_n v_n - 4v_n = u_n$$
$$\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = 4v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = 4v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{4v_n}{v_n - 1}$$

إذن :

$$u_n = \frac{4\left(9 + \frac{2n}{3}\right)}{\left(9 + \frac{2n}{3}\right) - 1} = \frac{36 + \frac{8n}{3}}{8 + \frac{2n}{3}} = \frac{108 + 8n}{24 + 2n}$$

نستنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \dfrac{54 + 4n}{12 + n}$

ج. **لدينا :** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{54 + 4n}{12 + n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4n}{n}$

إذن

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 4$$

د. **لدينا** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$ و الدالة ln متصلة في 4

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = \ln(4)$