اللوغاريتم النبيري

التمرين 2

مسألة :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)$

الجزء الأول

1) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2-2x+2>0$
2) أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم أدرس تغيرات f
3) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
4) أدرس الفروع اللانهائية ل (C_f)
5) بين أن $(D): x=1$ هو محور تماثل ل (C_f)
6) مثل مبيانيا (C_f) و $(\Delta): y=x$

الجزء الثاني

نضع $\varphi(x)=f(x)-x$

1) أحسب $\varphi'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم استنتج أن φ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$
2) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)$

ب- بين أن لكل $x>0$: $\varphi(x)=x\left[\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x}-1\right]$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$

3) بين أن $(\Delta): y=x$ يقطع (C_f) في نقطة وحيدة أفصولها α بحيث $0,3<\alpha<0,4$

التصحيح :

الجزء الأول

1) **ليكن** $x \in \mathbb{R}$:

لندرس إشارة $x^2 - 2x + 2$

لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4 < 0$

x	$-\infty \quad +\infty$
$x2-2x+2$	$+$

إذن : $x^2 - 2x + 2 > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

2) **الدالة** $u : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ **قابلة للإشتقاق على** $\mathbb{R}$ **و لكل** x **من** $\mathbb{R}$ **:** $x^2 - 2x + 2 > 0$

إذن الدالة $f = \ln(u)$ **قابلة للإشتقاق على** $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$ **:** $f'(x) = \left(\ln\left(x^2 - 2x + 2\right)\right)' = \dfrac{\left(x^2 - 2x + 2\right)'}{x^2 - 2x + 2} = \dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} = \dfrac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

لدينا لكل x **من** $\mathbb{R}$ **:** $x^2 - 2x + 2 > 0$ **إذن إشارة** $f'(x)$ **هي إشارة** $(x-1)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$-$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(3

- **بما أن** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x+2=+\infty$ **فإن** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x^2-2x+2\right)=+\infty$

و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- **بما أن** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x+2=+\infty$ **فإن** $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(x^2-2x+2\right)=+\infty$

و منه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

(4

- **لدينا** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، **لنحسب** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\right)+\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}2\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=0$$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)=0\end{cases}$ **إذن** $\left(C_f\right)$ **يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار** $+\infty$

- **لدينا** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، **لنحسب** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2\right)+\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}-2\frac{\ln(-x)}{-x}+\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=0$$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln -x}{-x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0 \left(t = -x\right) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right) = 0 \end{cases}$ إذن $\left(C_f\right)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$

5) بين أن $\left(D\right): x = 1$ هو محور تماثل ل $\left(C_f\right)$

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

✓ $2(1) - x = 2 - x \in \mathbb{R}$

✓ $f\left(2(1)-x\right) = f\left(2-x\right) = \ln\left(\left(2-x\right)^2 - 2\left(2-x\right) + 2\right) = \ln\left(4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2\right) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right) = f\left(x\right)$

إذن $\left(D\right): x = 1$ هو محور تماثل ل $\left(C_f\right)$

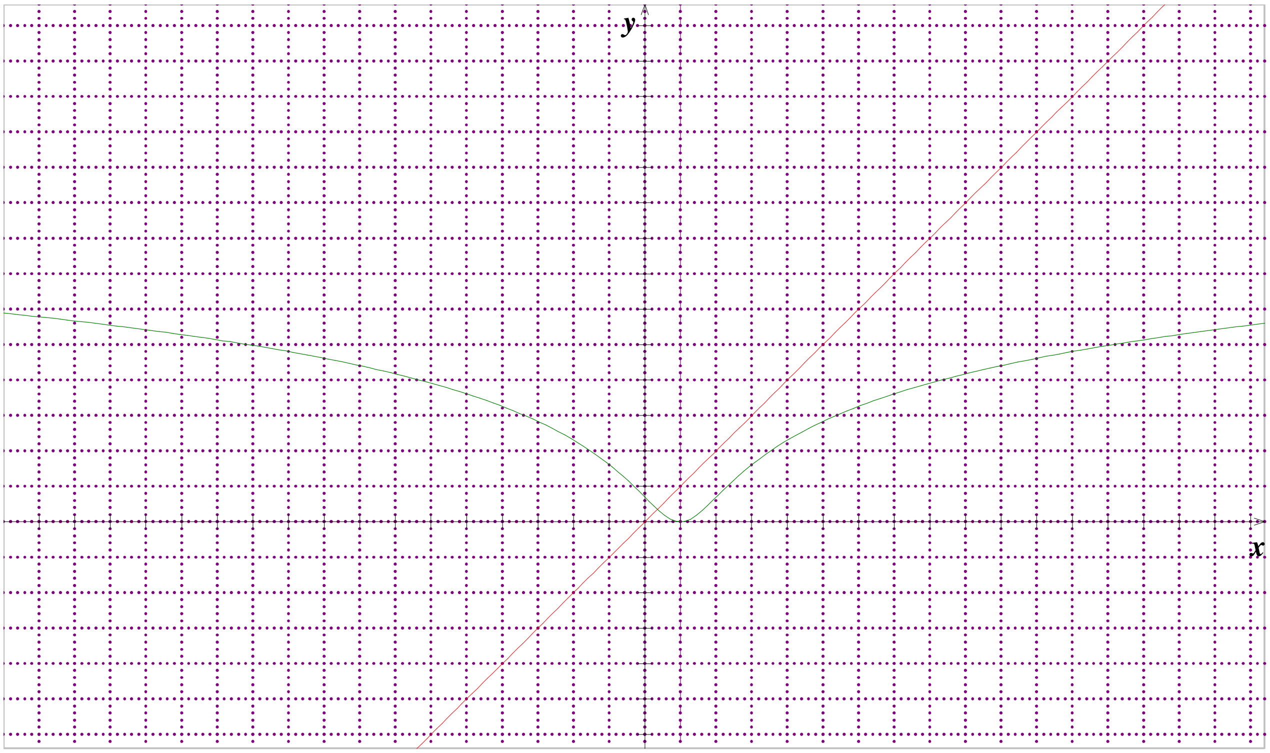
6)

التمثيل المبياني :

$\left(C_f\right)$ ممثل باللون الأخضر

$\left(\Delta\right): y = x$ ممثل باللون الأحمر

$\left(D\right): x = 1$ محور تماثل ل $\left(C_f\right)$ ممثل باللون البنفسجي



الجزء الثاني :

لدينا : $\varphi(x)=f(x)-x$

1) ليكن $x\in\mathbb{R}$: الدالة φ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\varphi'(x)=f'(x)-1=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}-1=\frac{2x-2-x^2+2x-2}{x^2-2x+2}=\frac{-x^2+4x-4}{x^2-2x+2}=\frac{-(x-2)^2}{x^2-2x+2}$$

لدينا $\varphi'(x)=0\Leftrightarrow x=2$ و لكل x من $\mathbb{R}$: $\varphi'(x)\leq 0$ إذن φ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

2)

أ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-x=+\infty$ لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty\end{cases}$

ب. **ليكن** $x>0$:

$$\varphi(x)=f(x)-x=2\ln x+\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)-x=x\left[\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x}-1\right]$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-\infty$ **لأن** $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)=0\end{cases}$

ج. **لنبين أن** $(\Delta):y=x$ **يقطع** (C_f) **في نقطة وحيدة أفصولها** α **بحيث** $0,3<\alpha<0,4$

- ✓ **أولا : سنبين أن** $(\Delta):y=x$ **يقطع** (C_f) **في نقطة وحيدة أفصولها** α

($f(x)=x\Leftrightarrow\varphi(x)=0$ **)**

- ❖ φ **متصلة على** $\mathbb{R}$
- ❖ $\varphi(\mathbb{R})=\varphi(]-\infty,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x),\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

إذن $0\in\varphi(\mathbb{R})$

- ❖ φ **تناقصية قطعا على** $\mathbb{R}$

و بالتالي المعادلة $\varphi(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **من** $\mathbb{R}$

- ✓ **ثانيا : لنتحقق أن** $0,3<\alpha<0,4$:
- ❖ φ **متصلة على** $[0,3;0,4]$
- ❖ $\varphi(0,3)\times\varphi(0,4)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية $0,3<\alpha<0,4$

<u>تأويل هندسي :</u> **المستقيم** $(\Delta):y=x$ **يقطع** (C_f) **في نقطة وحيدة أفصولها** α **بحيث** $0,3<\alpha<0,4$