الأعداد العقدية

التمرين 2

التمرين:

I.

1. **حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :** $z^2-2z+4=0$

2. **نعتبر الحدودية المعرفة بما يلي :** $P(z)=z^3-2(1+2i)z^2+4(1+2i)z-16i$

أ. بين أن $P(z)$ **تقبل جذرا تخيليا صرفا** z_0 **يتم تحديده**
ب. حدد α **و** β **و** γ **بحيث :** $P(z)=(z\text{-}z_0)(\alpha z^2+\beta z+\gamma)$
ج. حل في $\mathbb{C}$ **المعادلة :** $P(z)=0$

II. **في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم** $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ **، نعتبر النقط** A **و** B **و** C **و** D **التي ألحاقها على التوالي :**
$a=1+3i$ و $b=1\text{-}3i$ و $c=4$ و $d=5+i$

1. **أحسب** $\dfrac{b\text{-}c}{a\text{-}c}$ **ثم استنتج طبيعة المثلث** ABC
2. **أحسب** $\dfrac{d\text{-}b}{c\text{-}b}$ **ثم استنتج أن النقط** B **و** C **و** D **نقط مستقيمية.**

3. **لتكن** t **الإزاحة التي متجهتها** $\vec{u}$ **ذات اللحق** $1\text{-}2i$

أ. حدد الكتابة العقدية للإزاحة t
ب. حدد p **لحق النقطة** P **صورة** A **بالإزاحة** t

4. **ليكن** h **التحاكي الذي مركزه** C **و نسبته** 2

أ. حدد الكتابة العقدية للتحاكي h
ب. حدد q **لحق النقطة** Q **صورة** P **بالتحاكي** h

5. **ليكن** R **الدوران الذي مركزه** Ω **ذات اللحق** $\omega=-1+i$ **و زاويته** $\dfrac{-\pi}{2}$

أ. حدد الكتابة العقدية للدوران R
ب. حدد n **لحق النقطة** N **صورة** A **بالدوران** R

6. أحسب $\frac{n-p}{q-p}$ و استنتج طبيعة المثلث NPQ

7. لتكن S نقطة لحقها s=-1

أ. تحقق أن NPQS متوازي أضلاع

ب. استنتج مما سبق طبيعة الرباعي NPQS

تصحيح التمرين 1:

I. 1. لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4(1)(4)=4-16=-12$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين

$$z=\frac{-(-2)-i\sqrt{12}}{2(1)} \quad \text{أو} \quad z=\frac{-(-2)+i\sqrt{12}}{2(1)}$$

$$z=\frac{2-i\,2\sqrt{3}}{2} \quad \text{أو} \quad z=\frac{2+i\,2\sqrt{3}}{2}$$

$$z=1-i\sqrt{3} \quad \text{أو} \quad z=1+i\sqrt{3}$$

إذن $S=\left\{1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\right\}$

2. أ. لنبين أن $P(z)$ تقبل جذرا تخيليا صرفا z_0 يتم تحديده

نضع $z_0=ib$ $\quad (b\in\mathbb{R})$

$$P(ib)=0 \iff (ib)^3-2(1+2i)(ib)^2+4(1+2i)(ib)-16i=0$$

$$\iff -ib^3+2b^2(1+2i)+4ib-8b-16i=0$$

$$\iff -ib^3+2b^2+4ib^2+4ib-8b-16i=0$$

$$\iff -ib^3+2b^2+4ib^2+4ib-8b-16i=0$$

$$\iff \left(2b^2-8b\right)+i\left(-b^3+4b^2+4b-16\right)=0$$

$$\iff \begin{cases} 2b^2-8b=0 \\ -b^3+4b^2+4b-16=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2-8b=0 \\ -b^3+4b^2+4b-16=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \text{ أو } b=4 \\ -b^3+4b^2+4b-16=0 \end{cases}$$

إذن $b=4$ **ومنه** $z_0=4i$ **.**

ب. لنحدد α **و** β **و** γ **بحيث :** $\mathrm{P}(z)=(z-z_0)(\alpha z^2+\beta z+\gamma)$

لدينا

$$\begin{aligned}(z-z_0)(\alpha z^2+\beta z+\gamma) &= (z-4i)(\alpha z^2+\beta z+\gamma) \\ &= \alpha z^3+\beta z^2+\gamma z-4i\alpha z^2-4i\beta z-4i\gamma \\ &= \alpha z^3+(\beta-4i\alpha)z^2+(\gamma-4i\beta)z-4i\gamma\end{aligned}$$

إذن $\mathrm{P}(z)=(z-z_0)(\alpha z^2+\beta z+\gamma) \Leftrightarrow P(z)=\alpha z^3+(\beta-4i\alpha)z^2+(\gamma-4i\beta)z-4i\gamma$

و منه : $\begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-2 \\ \gamma=4 \end{cases}$ **و بالتالي :** $\mathrm{P}(z)=(z-4i)(z^2-2z+4)$

ج. لنحل في $\mathbb{C}$ **المعادلة :** $\mathrm{P}(z)=0$

$$\mathrm{P}(z)=0 \Leftrightarrow (z-4i)(z^2-2z+4)=0$$

$$\mathrm{P}(z)=0 \Leftrightarrow z-4i=0 \text{ أو } z^2-2z+4=0$$

$$\mathrm{P}(z)=0 \Leftrightarrow z=4i \text{ أو } z=1-i\sqrt{3} \text{ أو } z=1+i\sqrt{3}$$

إذن $S=\{4i;1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\}$

II. 1. لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{b-c}{a-c} &= \frac{(1-3i)-(4)}{(1+3i)-(4)} \\ &= \frac{-3-3i}{-3+3i} \\ &= \frac{i(-3+3i)}{-3+3i} \\ &= i\end{aligned}$$

إذن : $\frac{b-c}{a-c}=1e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

- لدينا : $\left|\frac{b-c}{a-c}\right|=1$ إذن $\frac{CB}{CA}=1$ ومنه $CB=CA$
- و لدينا : $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

خلاصة : المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في C.

2. لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{d-b}{c-b} &= \frac{(5+i)-(1-3i)}{(4)-(1-3i)}\\ &=\frac{4+4i}{3+3i}\\ &=\frac{4(1+i)}{3(1+i)}\\ &=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

بما أن : $\frac{\text{d-b}}{\text{c-b}}\in\mathbb{R}$ **فإن النقط** B و C و D **نقط مستقيمية.**

1. أ. لتكن t **الإزاحة التي متجهتها** $\vec{u}$ **ذات اللحق** 1-2i
لنحدد الكتابة العقدية للإزاحة t
لتكن $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالإزاحة t

$$\overrightarrow{MM'}=\vec{u} \Leftrightarrow t(M)=M'$$
$$z'-z=z_{\vec{u}} \Leftrightarrow$$
$$z'=z+1-2i \Leftrightarrow$$

ب. لنحدد p **لحق النقطة** P **صورة** A **بالإزاحة** t

لدينا : p=a+1-2i **إذن** p=1+3i+1-2i=2+i

4. أ. ليكن h **التحاكي الذي مركزه** C **و نسبته** 2
لنحدد الكتابة العقدية للتحاكي h
لتكن $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالتحاكي h

$$z'-c=2(z-c)$$
$$z'-4=2(z-4)$$
$$z'-4=2z-8$$
$$z'=2z-4$$

ب. لنحدد q **لحق النقطة** Q **صورة** P **بالتحاكي** h

لدينا :

$$q=2p-4$$
$$q=2(2+i)-4$$
$$q=4+2i-4$$
$$q=2i$$

5. أ. ليكن R **الدوران الذي مركزه** Ω **ذات اللحق** $\omega=-1+i$ **و زاويته** $\frac{-\pi}{2}$

لنحدد الكتابة العقدية للدوران R

لتكن $M'(z')$ **صورة** $M(z)$ **بالدوران** R

$$z'-\omega=e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}(z-\omega)$$
$$z'-(-1+i)=-i\,(z-(-1+i))$$
$$z'+1-i=-i\,(z+1-i)$$
$$z'+1-i=-iz-i-1$$
$$z'=-iz-2$$

ب. لنحدد n **لحق النقطة** N **صورة** A **بالدوران** R

لدينا :

$$n=-ia-2$$
$$n=-i\,(1+3i)-2$$
$$n=-i+3-2$$
$$n=-i+1$$

6. لدينا :

$$\frac{\text{n-p}}{\text{q-p}}=\frac{(1-i)-(2+i)}{(2i)-(2+i)}$$
$$\frac{\text{n-p}}{\text{q-p}}=\frac{-1-2i}{-2+i}$$
$$\frac{\text{n-p}}{\text{q-p}}=\frac{i\,(-2+i)}{-2+i}$$
$$\frac{\text{n-p}}{\text{q-p}}=i$$

إذن : $\frac{n-p}{q-p}=1e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

- **لدينا :** $\left|\frac{n-p}{q-p}\right|=1$ **إذن** $\frac{PN}{PQ}=1$ **ومنه** $PN=PQ$
- **و لدينا :** $\arg\left(\frac{n-p}{q-p}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ **إذن** $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PN}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

<u>خلاصة</u> : المثلث NPQ متساوي الساقين و قائم الزاوية في P .

7. لتكن S نقطة لحقها s=-1

أ. تحقق أن NPQS متوازي أضلاع

لدينا : $q-s=2i-(-1)=+2i$ **و** $p-n=(2+i)-(1-i)=1+2i$

إذن $q-s=p-n$ **و منه** $\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{NQ}$ **و بالتالي NPQS متوازي أضلاع**

ب. بما أن NPQS متوازي أضلاع و $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PN}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ **فإن الرباعي NPQS مستطيل**

و بما أن $PN=PQ$ **فإن الرباعي NPQS مربع.**