الدوال الأسّية

التمرين 2

مسألة :

الجزء الأول

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = ax + b + e^{-x}$ حيث a و b عددان حقيقيان سيتم تحديدهما

نعطي المعطيات التالية حول المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- $A(0,4) \in (C_g)$
- المماس ل (C_g) في النقطة ذات الأفصول 0 موازي لمحور الأفاصيل

1) حدد قيمة $g(0)$ و $g'(0)$
2) حدد قيمة العدد ين a و b

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x + 3 + e^{-x}$

1) أ- حدد $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
   ب- بين أن $(D) : y = x + 3$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$
   ج- أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و (D)
2) أ- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = e^{-x}(1 + xe^x + 3e^x)$
   ب- استنتج $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
3) أ- أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ و أدرس إشارتها على $\mathbb{R}$
   ب- ضع جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$
4) مثل مبيانيا (C_f)
5) أ- حدد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$
   ب- لون الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 3$
6) أحسب $\mathcal{A}$ مساحة هذا الحيز

التصحيح :

الجزء الأول

1)

- بما أن $A(0,4)\in(C_g)$ فإن : $g(0)=4$
- و بما أن المماس ل (C_g) في النقطة ذات الأفصول 0 موازي لمحور الأفاصيل (مماس أفقي في النقطة ذات الأفصول 0)

فإن : $g'(0)=0$

2) لدينا : الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=ax+b+e^{-x}$

g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لكل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=a-e^{-x}$

$$\begin{cases} g(0)=4 \\ g'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+1=4 \\ a-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=1 \end{cases}$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $g(x)=x+3+e^{-x}$

الجزء الثاني :

لدينا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x+3+e^{-x}$

1) أ. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+3+e^{-x}=+\infty$

لأن :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x+3=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{t\to-\infty} e^{t}=0 \quad \begin{pmatrix} t=-x \\ x\to+\infty \\ t\to-\infty \end{pmatrix}$

ب. بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+3)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ فإن $(D): y=x+3$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ج. لندرس الوضع النسبي ل $\left(C_f\right)$ و $\left(D\right)$:

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا : $f\left(x\right)-\left(x+3\right)=e^{-x}$ و نعلم أن $e^{-x}>0$

إذن : لكل x من $\mathbb{R}$: $f\left(x\right)-\left(x+3\right)>0$

و منه $\left(C_f\right)$ يوجد فوق المستقيم $\left(D\right)$.

2) أ. ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا : $f\left(x\right)=x+3+e^{-x}=e^{-x}\left(\frac{x}{e^{-x}}+\frac{3}{e^{-x}}+1\right)=e^{-x}\left(xe^{x}+3e^{x}+1\right)$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $f\left(x\right)=e^{-x}\left(1+xe^{x}+3e^{x}\right)$

ب. لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\left(xe^{x}+3e^{x}+1\right)=+\infty$

لأن :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t}=+\infty$ $\quad\begin{pmatrix} t=-x \\ x\to-\infty \\ t\to+\infty \end{pmatrix}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$

3) أ. ليكن $x \in \mathbb{R}$: $f'\left(x\right)=\left(x+3+e^{-x}\right)'=1-e^{-x}$

$$f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow 1-e^{-x}=0 \Leftrightarrow x=0$$

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$1-e^{-x}$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

- على المجال $\left[0,+\infty\right[$: $f'\left(x\right)\geq 0$
- على المجال $\left]-\infty,0\right]$: $f'\left(x\right)\leq 0$

طريقة 2 لدراسة إشارة $f\,'(x)$:

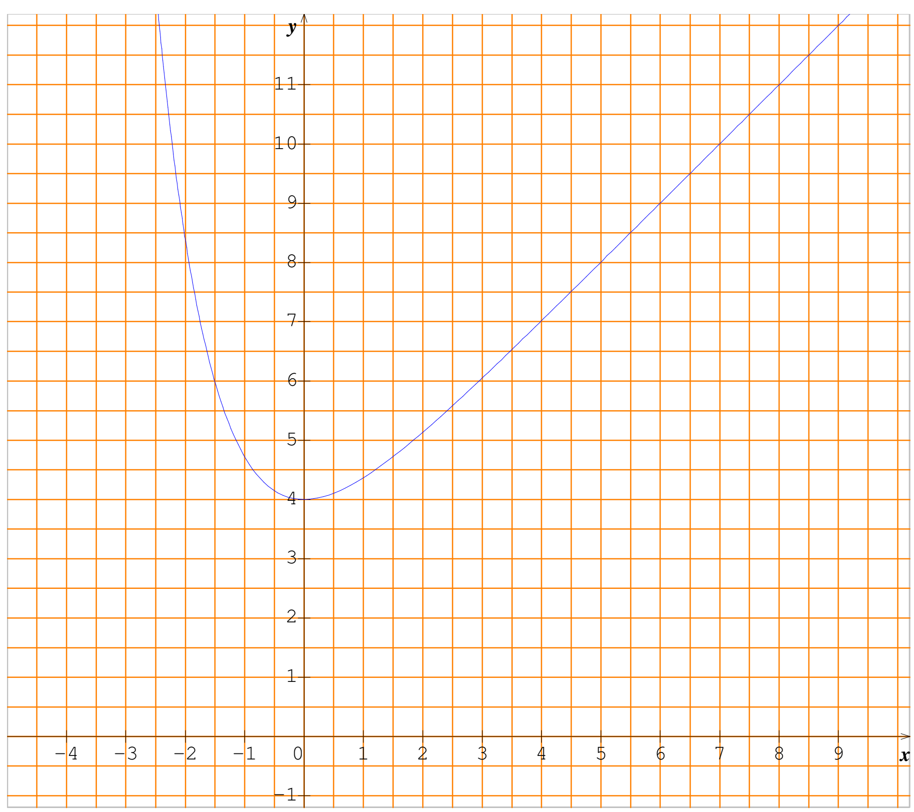
الحالة 1:إذا كان $x \geq 0$
لدينا $-x \leq 0$
إذن $e^{-x} \leq 1$
إذن $-e^{-x} \geq -1$
و منه $1-e^{-x} \geq 0$

الحالة 2: إذا كان $x \geq 0$
لدينا $-x \geq 0$
إذن $e^{-x} \geq 1$
إذن $-e^{-x} \leq -1$
و منه $1-e^{-x} \leq 0$

ب. جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$

4) التمثيل المبياني ل (C_f)



(5

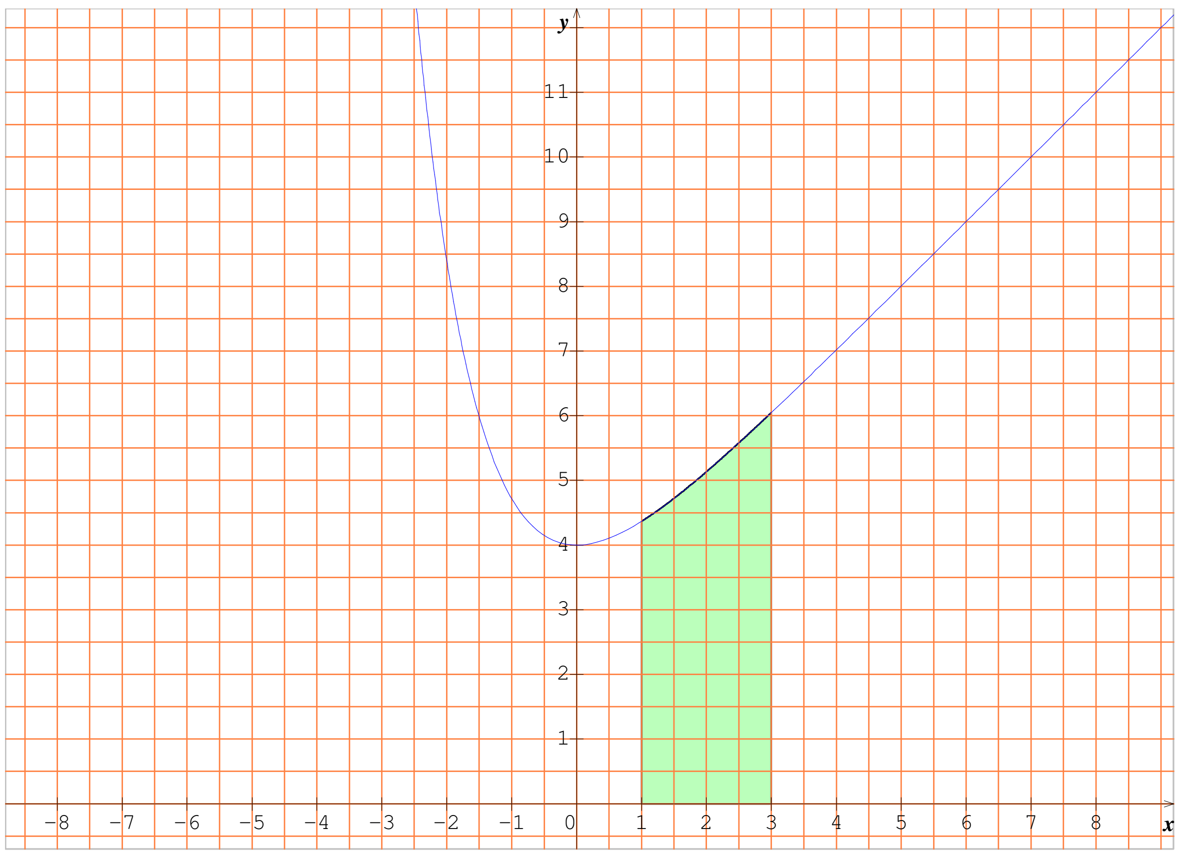
أ. بما أن f متصلة على $\mathbb{R}$ فإن f تقبل دالة أصلية F على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا : $F(x) = \dfrac{x^{1+1}}{1+1} + 3x + \dfrac{1}{-1}e^{-x}$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 3x - e^{-x}$

ب. تلوين الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 3$



ج. لنحسب $\mathcal{A}$ مساحة هذا الحيز:

لدينا : $\mathcal{A} = \int_1^3 |f(x)| dx \quad (U.A)$

و بما أن $f(x) > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ فإن $\mathcal{A} = \int_1^3 f(x) dx \quad (U.A)$

إذن : $\mathcal{A} = \left[F(x) \right]_1^3 \quad (U.A)$

إذن : $\mathcal{A} = \left[\frac{x^2}{2} + 3x - e^{-x} \right]_1^3 \quad (U.A)$

و منه : $\mathcal{A} = \left(10 - \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e} \right) \quad (U.A)$