المتتاليات

التمرين 1

تمرين :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{8}u_n + \dfrac{5}{8} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) **تحقق أن لكل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3}{8}(u_n - 1)$
2) **بين بالترجع لكل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n > 1$
3) **بين أن** (u_n) **تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة**
4) **نضع لكل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $v_n = u_n - 1$
   - **أ. باستعمال السؤال 1) بين أن** (v_n) **هندسية محددا أساسها و حدها الأول**
   - **ب. أكتب** v_n **بدلالة** n **ثم استنتج** u_n **بدلالة** n
   - **ج. أحسب** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

التصحيح

1) **ليكن** $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{3}{8}u_n + \frac{5}{8} - 1 \\ &= \frac{3}{8}u_n + \frac{5-8}{8} \\ &= \frac{3}{8}u_n - \frac{3}{8} \\ &= \frac{3}{8}(u_n - 1) \end{aligned}$$

إذن نستنتج : لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3}{8}(u_n - 1)$

(2

- **من أجل** $n=0$ **لدينا :** $u_0=2$ **إذن** $u_0>1$
- **ليكن** $n\in\mathbb{N}$
  - ✓ **نفترض أن :** $u_n>1$
  - ✓ **و نبين أن :** $u_{n+1}>1$

حسب نتيجة السؤال 1) لدينا : $u_{n+1}-1=\frac{3}{8}(u_n-1)$

و حسب الإفتراض ، لدينا $u_n>1$

إذن $u_n-1>0$

إذن $\frac{3}{8}(u_n-1)>0$

و منه $u_{n+1}-1>0$ **أي** $u_{n+1}>1$

- **نستنتج : لكل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n>1$

(3

- **ليكن** $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \frac{3}{8}u_n+\frac{5}{8}-u_n\\ &= \frac{3-8}{8}u_n+\frac{5}{8}\\ &= \frac{-5}{8}u_n+\frac{5}{8}\\ &= \frac{-5}{8}(u_n-1)\end{aligned}$$

حسب نتيجة السؤال 2) لدينا : $u_n>1$ **إذن** $u_n-1>0$ **و منه** $\frac{-5}{8}(u_n-1)<0$

و بالتالي لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1}-u_n<0$

نستنتج أن : (u_n) **تناقصية قطعا .**

- **بما أن** (u_n) **تناقصية و مصغورة (بالعدد 1) فإن** (u_n) **متقاربة.**

4) أ. ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= \frac{3}{8}(u_n - 1) \\ &= \frac{3}{8} \times v_n \end{aligned}$$

إذن لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $v_{n+1} = \frac{3}{8} \times v_n$

و منه المتتالية (v_n) **هندسية أساسها** $q = \frac{3}{8}$ **و حده الأول** v_0 **حيث :** $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

ب. ليكن $n \in \mathbb{N}$

- **لدينا :** $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{3}{8}\right)^n$

  إذن لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $v_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n$

- **لدينا :** $v_n = u_n - 1$ **إذن** $u_n = v_n + 1$

  و منه لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n + 1$

ج. بما أن $-1 < \frac{3}{8} < 1$ **فإن** $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$

إذن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n + 1 = 1$

و منه $\lim_{n \to +\infty} v_n = 1$