عموميات حول الدوال العددية

تذكير : دراسة بعض الدوال الإعتيادية

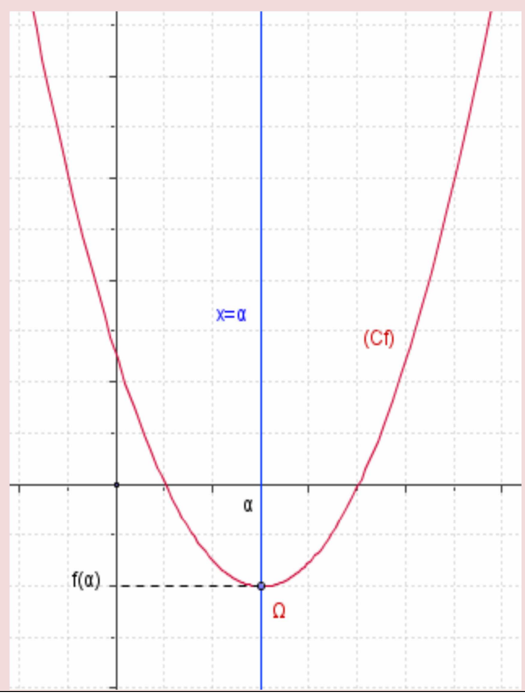
دراسة و تمثيل الدالة $f : x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

نضع $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$

التمثيل المبياني للدالة $x \mapsto ax^2 + bx + c$ عبارة عن شلجم رأسه $\Omega(\alpha, f(\alpha))$ و محوره هو المستقيم الذي معادلته $x = \alpha$.

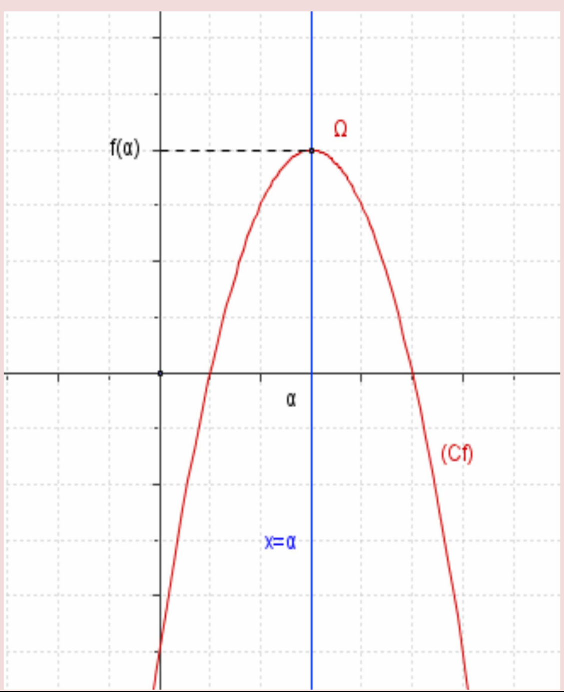
$a > 0$

x	$-\infty$	$-b/2a$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-b/2a)$	$\nearrow$



$a > 0$

x	$-\infty$	$-b/2a$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-b/2a)$	$\searrow$



دراسة و تمثيل الدالة $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$

نعتبر الدالة $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$

الدالة f تسمى دالة متخاطة

لدينا $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-d}{c}\right\} = \left]-\infty, \dfrac{-d}{c}\right[\cup \left]\dfrac{-d}{c}, +\infty\right[$

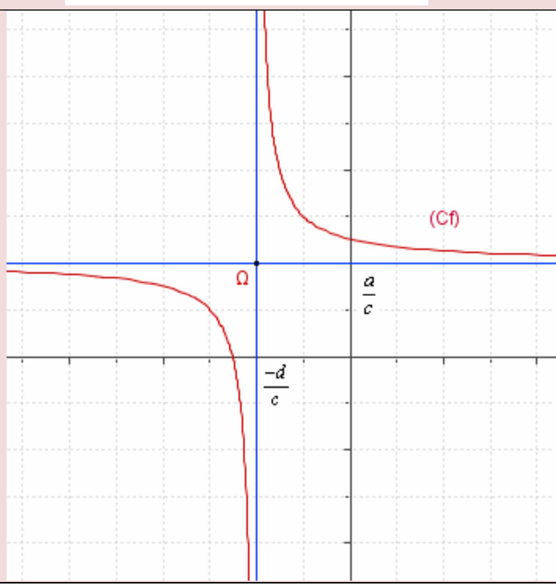
التمثيل المبياني للدالة $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ عبارة عن هذلول مركزه $\Omega\left(\dfrac{-d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ و مقارباه هما المستقيمان اللذين معادلتاهما :

$x = \dfrac{-d}{c}$ و $y = \dfrac{a}{c}$

العدد $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ يسمى محددة الدالة $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$

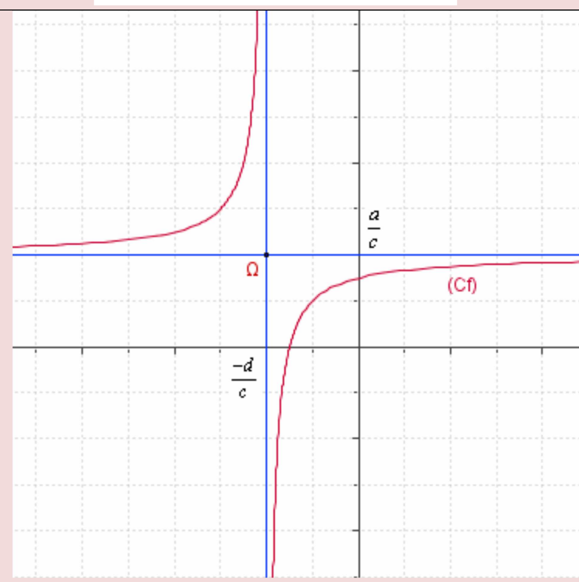
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$

x	$-\infty$		$-d/c$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	||	$\searrow$	



$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$

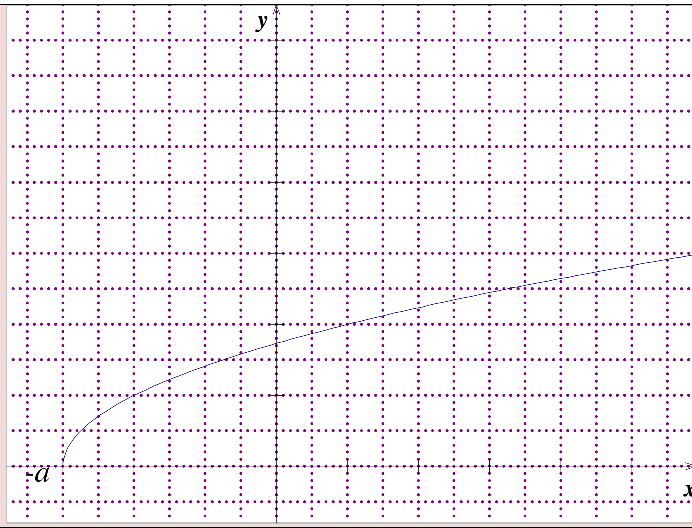
x	$-\infty$		$-d/c$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	||	$\nearrow$	



دراسة الدالة $f : x \mapsto \sqrt{x+a}$

نعتبر الدالة $f : x \mapsto \sqrt{x+a}$

لدينا $D_f = [-a,+\infty[$

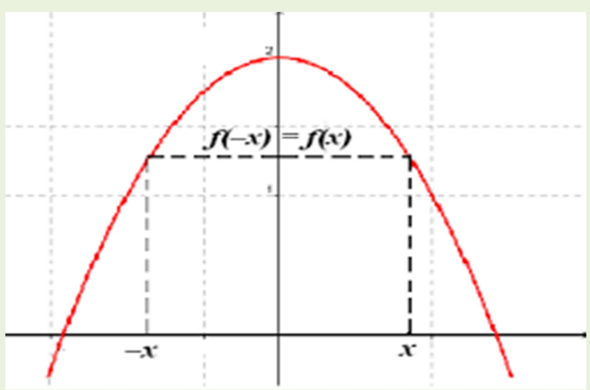


x	$-a \qquad +\infty$
$f(x)$	$0 \nearrow$

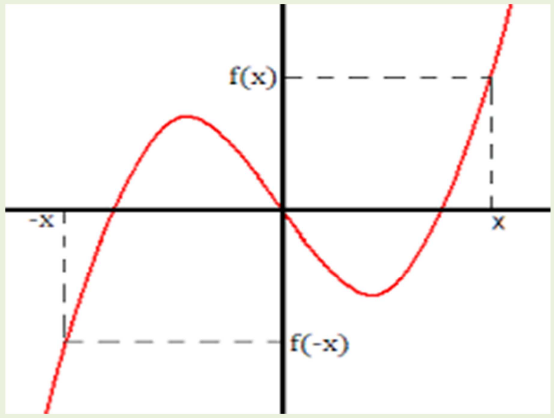
الدالة الزوجية ــ الدالة الفردية

لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها.

- f زوجية إذا وفقط إذا كان لكل x من D_f : $-x \in D_f$ و $f(-x) = f(x)$



- f فردية إذا وفقط إذا كان لكل x من D_f : $-x \in D_f$ و $f(-x) = -f(x)$



لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- f زوجية يعني أن C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب
- f فردية يعني أن C_f متماثل بالنسبة لأصل المعلم

الدالة المكبورة – الدالة المصغورة – الدالة المحدودة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

- نقول إن f مكبورة على I إذا وجد عدد حقيقي M بحيث : $f(x) \le M$ لكل x من I
- نقول إن f مصغورة على I إذا وجد عدد حقيقي m بحيث : $m \le f(x)$ لكل x من I
- نقول إن f محدودة إذا كانت f مكبورة و مصغورة

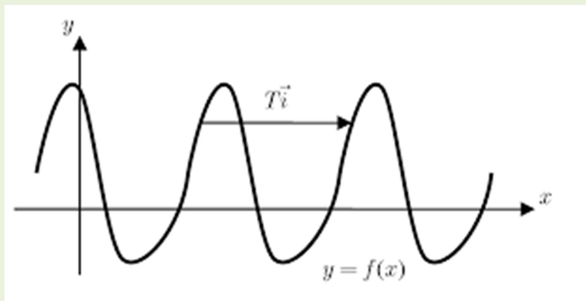
لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

تكون f دالة محدودة على I إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب k بحيث : $|f(x)| \le k$ لكل x من I

الدالة الدورية

نقول إن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث :

$$\begin{cases} (\forall x \in D_f) : x+T \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(x+T)=f(x) \end{cases}$$



العدد T يسمى دور للدالة f
أصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالة f

إذا كان T دورا لدالة عددية f فإنه لكل k من $\mathbb{Z}$: $(\forall x \in D_f)\quad f(x+kT)=f(x)$

مطاريف دالة عددية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصرا من المجال I

- نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I ، إذا كان : $f(x) \le f(a)$ لكل x من I
- نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I ، إذا كان : $f(x) \ge f(a)$ لكل x من I

مقارنة دالتين – التأويل الهندسي

لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعة تعريفهما.

$$f=g \Leftrightarrow \begin{cases} D_f = D_g \\ (\forall x \in D); f(x)=g(x) \end{cases}$$ حيث $D=D_f=D_g$

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I .
نقول إن f أصغر من أو تساوي g على I ، إذا وفقط إذا كان : $(\forall x \in I);f(x) \leq g(x)$
هندسيا : منحنى الدالة f على I يوجد تحت منحنى الدالة g على I.

مركب دالتين

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على التوالي على D_f و D_g
نضع $D = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f , \mathrm{f}(\mathrm{x}) \in D_g\}$
الدالة العددية h المعرفة على D بما يلي : $h(x) = g(f(x))$ ، تسمى مركب الدالتين f و g في هذا الترتيب و يرمز لها بالرمز $g \circ f$

رتابة دالة عددية

f دالة عددية و I مجالا ضمن D_f.
- f تزايدية على I يعني أنه لكل عنصرين a و b من I : إذا كان $a \leq b$ فإن $f(a) \leq f(b)$
- f تزايدية قطعا على I يعني أنه لكل عنصرين a و b من I : إذا كان $a < b$ فإن $f(a) < f(b)$
- f تناقصية على I يعني أنه لكل عنصرين a و b من I : إذا كان $a \leq b$ فإن $f(a) \geq f(b)$
- f تناقصية قطعا على I يعني أنه لكل عنصرين a و b من I : إذا كان $a < b$ فإن $f(a) > f(b)$

f دالة عددية و I مجالا ضمن D_f.
- f رتيبة على I يعني f تزايدية أو تناقصية على I.
- f رتيبة قطعا على I يعني f تزايدية قطعا أو تناقصية قطعا على I.

f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها و a و b عنصران مختلفان من D_f
العدد $T = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ يسمى معدل تغير f بين a و b

لتكن f دالة عددية و $T=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ معدل تغيرها بين عنصرين مختلفين a و b من مجال I ضمن D_f

- إذا كان $T\geq 0$ فإن f تزايدية على I
- إذا كان $T>0$ فإن f تزايدية قطعا على I
- إذا كان $T\leq 0$ فإن f تناقصية على I
- إذا كان $T<0$ فإن f تناقصية قطعا على I

f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f متماثلة بالنسبة للعدد 0

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}^+$ ضمن D_f و I' مماثل I بالنسبة للعدد 0

- في حالة f دالة زوجية ، لدينا :
  - إذا كانت f تزايدية على I فإنها تناقصية على I'
  - إذا كانت f تناقصية على I فإنها تزايدية على I'
- في حالة f دالة فردية ، لدينا :
  f لها نفس منحى التغيرات على كل من I و I' .

رتابة مركب دالتين

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على التوالي على مجالين I و J بحيث : $f(x)\in J$ لكل x من I ($f(I)\subset J$) ، لدينا :

- إذا كانت f تزايدية قطعا على I و g تزايدية قطعا على J فإن $g\circ f$ تزايدية قطعا على I
- إذا كانت f تزايدية قطعا على I و g تناقصية قطعا على J فإن $g\circ f$ تناقصية قطعا على I
- إذا كانت f تناقصية قطعا على I و g تزايدية قطعا على J فإن $g\circ f$ تناقصية قطعا على I
- إذا كانت f تناقصية قطعا على I و g تناقصية قطعا على J فإن $g\circ f$ تزايدية قطعا على I