النهايات

- $\lim_{x\to a} f(x)=l$ تكافئ $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,|x-a|<\alpha\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$
- $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ تكافئ $\forall A>0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,|x-a|<\alpha\Rightarrow f(x)\geq A$
- $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ تكافئ $\forall B<0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,|x-a|<\alpha\Rightarrow f(x)\leq B$
- $\lim_{x\to a^+} f(x)=l$ تكافئ $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,0<x-a<\alpha\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$
- $\lim_{x\to a^-} f(x)=l$ تكافئ $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,-\alpha<x-a<0\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$
- $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ تكافئ $\forall A>0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,0<x-a<\alpha\Rightarrow f(x)\geq A$
- $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ تكافئ $\forall A>0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,-\alpha<x-a<0\Rightarrow f(x)\geq A$
- $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ تكافئ $\forall B<0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,0<x-a<\alpha\Rightarrow f(x)\leq B$
- $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ تكافئ $\forall B<0,\exists\alpha>0,\forall x\in D_f,-\alpha<x-a<0\Rightarrow f(x)\leq B$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ تكافئ $\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall x\in D_f,(x\geq A)\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ تكافئ $\forall\varepsilon>0,\exists B<0,\forall x\in D_f,(x\leq B)\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ تكافئ $\forall A>0,\exists B>0,\forall x\in D_f,x\geq B\Rightarrow f(x)\geq A$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ تكافئ $\forall A<0,\exists B>0,\forall x\in D_f,x\geq B\Rightarrow f(x)\leq A$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ تكافئ $\forall A>0,\exists B<0,\forall x\in D_f,x\leq B\Rightarrow f(x)\geq A$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ تكافئ $\forall A<0,\exists B<0,\forall x\in D_f,x\leq B\Rightarrow f(x)\leq A$

نهاية لا منتهية لدالة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

- **لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a,+\infty[$ حيث $a\in\mathbb{R}$.**
  إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

بنفس الطريقة يمكنك التعبير عن الحالات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$	$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$	$\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$
$\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$	$\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$	$\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$	

- لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{زوجي } n \\ -\infty & \text{فردي } n \end{cases}$

نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a,+\infty[$ حيث $a\in\mathbb{R}$ و ليكن l عددا حقيقيا.
  إذا كان $f(x)$ يؤول إلى العدد l عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]-\infty,b]$ حيث $b\in\mathbb{R}$ و ليكن l' عددا حقيقيا.
  إذا كان $f(x)$ يؤول إلى العدد l' عندما يؤول x إلى $-\infty$ فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l'$ ..

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$	• $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$	• $n\in\mathbb{N}^*; \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	• $n\in\mathbb{N}^*; \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

لتكن f دالة عددية و l عددا حقيقيا.
- إذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ (أو في $-\infty$) فإن هذه النهاية وحيدة.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ يكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-l) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ يكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-l) = 0$

النهايات المنتهية و اللامنتهية لدالة في نقطة

لتكن f دالة عددية و a و l عددين حقيقيين بحيث f معرفة على مجال على الشكل $]a-\alpha,a+\alpha[$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}_*^+$ أو على مجموعة على الشكل $]a-\alpha,a+\alpha[-\{a\}$
إذا كان $f(x)$ يؤول إلى العدد l عندما يؤول x إلى العدد a ، فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

لتكن f دالة عددية و a و l عددين حقيقيين.
إذا كانت f تقبل نهاية l في a ، فإن هذه النهاية وحيدة.

• $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$	• $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$	• $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$	• $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

لتكن f دالة عددية و a عددا حقيقيا .
إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a ، فإننا نكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

النهاية على اليمين و النهاية على اليسار لدالة في نقطة

لتكن f دالة عددية و a و l عددين حقيقيين.

- إذا كان $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=l$ أو $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$
- إذا كان $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ (على التوالي إلى $-\infty$) عندما يؤول x إلى a على اليمين فإننا نكتب
  $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ (على التوالي $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$)
- نعرف بنفس الطريقة النهاية على اليسار لدالة في نقطة.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}=+\infty$ • $n\in\mathbb{N}^*;\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^n}=+\infty$	• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x}=-\infty$ • إذا كان n زوجيا عير منعدم ،فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n}=+\infty$ • إذا كان n فرديا غير منعدم ، فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n}=-\infty$	• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}=0$

لتكن f دالة عددية .
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ يكافئ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=l$

العمليات على النهايات

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim f\times g$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	$l\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

$\lim f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	l	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l'\neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	شكل غير محدد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

نهاية دالة حدودية – نهاية دالة جذرية

- **لتكن P و Q دالتين حدوديتين و x_0 عددا حقيقيا .**
  - $\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$
  - $\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ **في حالة** $Q(x_0)\neq 0$
- **و إذا كانت ax^n و bx^m هما على التوالي حديتي P و Q الأكبر درجة ، فإن :**
  - $\lim_{x\to+\infty} P(x)=\lim_{x\to+\infty} ax^n$
  - $\lim_{x\to-\infty} P(x)=\lim_{x\to-\infty} ax^n$
  - $\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^n}{bx^m}$
  - $\lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{bx^m}$

نهاية الدوال اللاجذرية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a,+\infty[$ بحيث : $\left(\forall x\in[a,+\infty[\right);f(x)\geq 0$

- **إذا كان** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ **و** $l\geq 0$ **فإن :** $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$
- **إذا كان** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **فإن :** $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$

هذه الخاصية تبقى صالحة إذا كان x يؤول إلى $-\infty$ أو إلى a أو إلى a على اليمين أو إلى a على اليسار

نهايات الدوال المثلثية

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$
- **لكل** a **من** $\mathbb{R}^*$: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a$
- **لكل** a **من** $\mathbb{R}$ لدينا : $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$
- $\lim_{x\to 0}\sin x=0$ و $\lim_{x\to 0}\tan x=0$
- **لكل** a **من** $\mathbb{R}$ لدينا : $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$
- $\lim_{x\to 0}\cos x=1$
- **لكل (** $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$) $\lim_{x\to a}\tan x=\tan a$

النهايات و الترتيب

ليكن I **مجالا من النوع** $[a,+\infty[$ **و** l **عددا حقيقيا و لتكن** f **و** u **و** v **دوال عددية معرفة على المجال** I **.**

1) إذا كان : $\begin{cases}(\forall x\in I);u(x)\leq f(x)\\ \lim_{x\to+\infty}u(x)=+\infty\end{cases}$ **فإن :** $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) إذا كان : $\begin{cases}(\forall x\in I);u(x)\geq f(x)\\ \lim_{x\to+\infty}u(x)=-\infty\end{cases}$ **فإن :** $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

3) إذا كان : $\begin{cases}(\forall x\in I);|f(x)-l|\leq u(x)\\ \lim_{x\to+\infty}u(x)=0\end{cases}$ **فإن :** $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$

4) إذا كان : $\begin{cases}(\forall x\in I);u(x)\leq f(x)\leq v(x)\\ \lim_{x\to+\infty}u(x)=\lim_{x\to+\infty}v(x)=l\end{cases}$ **فإن :** $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$ **(مبرهنة الدرك)**

تبقىهذه الخاصيات تبقى صالحة إذا كان x يؤول إلى $-\infty$ أو إلى a أو إلى a على اليمين أو إلى a على اليسار