سِلْسِلَةُ الأعْدَادِ العُقَدِيّة

التمرين 1 :

1) أ. اعط الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه Ω ذات اللحق $\omega=1+2i$ و الذ يحول النقطة A ذات اللحق $a=5+3i$ إلى النقطة B ذات اللحق $b=17+6i$

2) أ. اعط الكتابة العقدية للدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$

ب. حدد b لحق النقطة B صورة النقطة A ذات اللحق $a=2+3i$

ج. أحسب $\frac{b}{a}$ و استنتج طبيعة المثلث OAB

3) أكتب العدد التالي على شكله المثلثي : $1+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

4) حدد مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق : $|iz-2+3i|=5$ و اعط معادلتها .

5) نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي : $a=2i$ و $b=2+3i$ و $c=1$

أحسب $\frac{c-a}{b-a}$ و حدد طبيعة المثلث ABC

6) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $-z^2+2\sqrt{3}z-4=0$

7) نعتبر العدد العقدي $U=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

أ. بين أن معيار العدد U هو $\sqrt{2}$ و أن $\arg U\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

ب. باستعمال كتابة العدد U على الشكل المثلثي بين أن U^{12} عدد حقيقي

8) لتكن $\theta\in\mathbb{R}$ أخطط $\cos^3(\theta)$

التمرين 2 :

1) أ. اعط الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه Ω ذات اللحق $\omega=1+2i$ و نسبته 2 .

ب. حدد b لحق النقطة B صورة النقطة A ذات اللحق $a=1-i$

2) أ. اعط الكتابة العقدية للدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{-\pi}{2}$

ب. حدد b لحق النقطة B صورة النقطة A ذات اللحق $a=2+3i$

ج. أحسب $\frac{b}{a}$ و استنتج طبيعة المثلث OAB

3) أكتب العدد التالي على شكله المثلثي : $1+\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$

4) حدد مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق : $|iz-2|=|z-3i|$ و اعط معادلتها

5) نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي : $a=2i$ و $b=-\sqrt{3}-i$ و $c=\sqrt{3}-i$

أحسب $\frac{c-a}{b-a}$ و حدد طبيعة المثلث ABC

6) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-\sqrt{6}z+2=0$

7) نعتبر العدد العقدي $U=\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

أ. بين أن معيار العدد U هو $\sqrt{2}$ و أن $\arg U\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

ب. باستعمال كتابة العدد U على الشكل المثلثي بين أن U^{12} عدد حقيقي

8) لتكن $\theta\in\mathbb{R}$ أخطط $\sin^3(\theta)$

التمرين 3 :

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي : $a=8i$ و $b=4\sqrt{3}-4i$ و $c=2\left(4\sqrt{3}+4i\right)$ و لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى و $M'(z')$ صورتها بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{4\pi}{3}$

أ.بين أن : $z'=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

ب.تحقق من أن النقطة B هي صورة النقطة A بالدوران R

ج.بين أن $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ثم أكتبه علىالشكل المثلثي

د.استنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين 4 :

I. 1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$

2. نعتبر الحدودية المعرفة بما يلي : $P(z)=z^3-2(1+2i)z^2+4(1+2i)z-16i$

أ. بين أن $P(z)$ تقبل جذرا تخيليا صرفا z_0 يتم تحديده

ب. حدد α و β و γ بحيث : $P(z)=(z-z_0)\left(\alpha z^2+\beta z+\gamma\right)$

ج. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$

II. في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ ، نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي :

a=1+3i و b=1-3i و c=4 و d=5+i

1. أحسب $\frac{b-c}{a-c}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC
2. أحسب $\frac{d-b}{c-b}$ ثم استنتج أن النقط B و C و D نقط مستقيمية.
3. لتكن t الإزاحة التي متجهتها $\vec{u}$ ذات اللحق 1-2i
   أ. حدد الكتابة العقدية للإزاحة t
   ب. حدد p لحق النقطة P صورة A بالإزاحة t
4. ليكن h التحاكي الذي مركزه C و نسبته 2
   أ. حدد الكتابة العقدية للتحاكي h
   ب. حدد q لحق النقطة Q صورة P بالتحاكي h
5. ليكن R الدوران الذي مركزه Ω ذات اللحق $\omega=-1+i$ و زاويته $\frac{-\pi}{2}$
   أ. حدد الكتابة العقدية للدوران R
   ب. حدد n لحق النقطة N صورة A بالدوران R
6. أحسب $\frac{n-p}{q-p}$ و استنتج طبيعة المثلث NPQ
7. لتكن S نقطة لحقها s=-1
   أ. تحقق أن NPQS متوازي أضلاع
   ب. استنتج مما سبق طبيعة الرباعي NPQS

التمرين 5 :

نضع $Z=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $Z'=1+i\sqrt{3}$

1. أكتب Z و 'Z على شكلهما المثلثي
2. أكتب $\frac{Z}{Z'}$ على شكله الجبري و المثلثي
3. استنتج القيم المضبوطة ل $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

التمرين 6 :

نضع $U=\frac{\sqrt{2}+2}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

1. تحقق أن $e^{i\frac{\pi}{4}}+1=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right).e^{i\frac{\pi}{8}}$
2. بين أن : $U=\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$

3. استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

التمرين 7 :

بين أن $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2016} \in \mathbb{R}$

التمرين 8 :

1. بين أن : $1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=0$
2. ليكن z و u عددين عقديين بحيث $u\neq 1$ بين أنه إذا كان $|u|=1$ فإن $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}\in\mathbb{R}$

التمرين 9 :

لتكن P و Q و R و S اربع نقط ألحاقها على التوالي : $p=3+2i$ و $q=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$ و $r=-5-i$ و $s=-\frac{5}{2}+\frac{9}{2}i$

بين أن النقط P و Q و R و S متداورة

التمرين 10 :

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+37=0$
2. نعتبر في المستوئ العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقطتين B و C اللتين لحقاهما على التوالي : $b=1-i\sqrt{3}$ و $c=1+\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right)$

   أ. تحقق أن : $c-b=ib$

   ب. استنتج أن $\arg\left(\frac{c-b}{b}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و أن المثلث OBC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B
3. لتكن النقطة A صورة النقطة B بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$ و ليكن a لحق النقطة A.

   أ. تحقق أن $c-a=-b$ ثم استنتج كتابة أسية للعدد العقدي $\frac{c-b}{c-a}$ (يمكن استعمال نتيجة السؤال 2. أ.)

   ب. حدد طبيعة المثلث ABC

التمرين 11 :

نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A و B و C و Ω التي ألحاقها على التوالي : $a=1+2i$ و $b=-3$ و $c=-i$ و $\omega=-1+i$

1. أ. بين أن $\frac{c-\omega}{a-\omega}=-i$ ثم استنتج أن المثلث ΩAC قائم الزاوية و متساوي الساقين في Ω
ب. حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z التي تحقق : $|z+i|=|z+3|$
2. ليكن z لحق نقطة M و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{-\pi}{2}$
بين أن $z'=-iz-2$ ثم استنتج أن النقطة B هي صورة النقطة C بالدوران R
3. نعتبر التحاكي h الذي مركزه A و نسبته $k=\frac{1}{2}$. بين أن $h(B)=\Omega$

التمرين 12 :

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-16z+80=0$
2. نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A و B و C و Ω التي ألحاقها على التوالي : $a=8-4i$ و $b=1-3i$ و $c=2+i$ و $\omega=i$
ليكن z لحق نقطة M و z' لحق النقطة M' صورة M بالإزاحة t ذات المتجهة $\overrightarrow{O\Omega}$
أ. بين أن : $z'=z+i$
ب. تحقق من أن لحق النقطة D صورة النقطة A بالإزاحة t هو $d=8-3i$
ج. بين أن : $a=b(i+c)$ ثم أكتب العدد $(i+c)$ على الشكل المثلثي
د. بين أن $\left(\frac{a}{b}\right)^{2020}=-8^{1010}$
ه. حدد قياسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)$ و استنتج أن $OA=2\sqrt{2}\times OB$
3. لتكن Δ مجموعة النقط M ذات اللحق z التي تحقق : $|iz+1|=|z-2-i|$
حدد طبيعة هذه المجموعة و اعط معادلتها .

التمرين 13 :

1. نعتبر العدد العقدي : $u=2+\sqrt{3}+i$
أ. بين أن : $u=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right).\overline{u}$
ب. بين أن $\arg(u)\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi]$
2. نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي : $a=1+2i$ و $b=3+3i$ و $c=4+5i$
أ. لتكن D النقطة بحيث الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع . تحقق من أن لحق النقطة D هو : $d=2+4i$
ب. بين أن : $c-a=3i(b-d)$ و استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان
ج. استنتج مما سبق أن الرباعي $ABCD$ معين
د. لتكن E مماثلة النقطة B بالنسبة للنقطة A . تحقق أن لحق النقطة E هو : $e=-1+i$

ه. بين أن النقط B و E و D تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي مركزها A و شعاعها ينبغي تحديده