علوم تجريبية

وطني 2019 - الدورة العادية

التمرين الأول : (3 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1,-1,-1)$ و $B(0,-2,1)$ و $C(1,-2,0)$	
1) أ. بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$	0,75
ب. استنتج أن $x+y+z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)	0,5
2) لتكن (S) الفلكة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$	0,75
بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(2,-1,1)$ و أن شعاعها هو $R=\sqrt{5}$	
3) أ. أحسب $d(\Omega,(ABC))$ مسافة النقطة Ω عن المستوى (ABC)	0,5
ب. استنتج أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) (تحديد مركز و شعاع (Γ) غير مطلوب)	0,5

التمرين الثاني : (3 نقط)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$	0,75
2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي: $a=1-i\sqrt{3}$ و $b=2+2i$ و $c=\sqrt{3}+i$ و $d=-2+2\sqrt{3}$	
أ. تحقق أن $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$	0,5
ب. استنتج أن النقط A و C و D مستقيمية	0,25
3) ليكن z لحق نقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{-\pi}{3}$	
تحقق من أن $z'=\frac{1}{2}az$	0,5
4) لتكن H صورة النقطة B بالدوران R، و h لحقها ، و P النقطة التي لحقها p حيث $p=a-c$	
أ. تحقق أن $h=ip$	0,5
ب. بين أن المثلث OHP قائم الزاوية و متساوي الساقين في O	0,5

التمرين الثالث : (3 نقط)

يحتوي صندوق على عشر كرات : ثلاث كرات خضراء و ست كرات حمراء و كرة واحدة سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس . نسحب عشوائيا و تآنيا ثلاث كرات من الصندوق .	

نعتبر الأحداث التالية : A " الحصول على ثلاث كرات خضراء "
B " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "
C " الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون "

1) بين أن : $p(A)=\frac{1}{120}$ و $p(B)=\frac{7}{40}$ — 2

2) أحسب $p(C)$ — 1

المسألة : (11 نقط)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة : $1cm$)

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا — 0,5

2) أ. تحقق أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f(x)=x+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}\ln x-1)\ln x$ — 0,25

ب. استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ — 0,5

ج. بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x}=4(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}})^2$ ثم استنتج : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ — 0,5

د. بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المقارب المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ — 0,75

3) أ. بين أنه لكل x من $]0,1]$: $(x-1)+\ln x\leq 0$ و أن لكل x من $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x\geq 0$ — 0,5

ب. بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$ — 1

ج. ضع جدول تغيرات الدالة f — 0,5

4) أ. بين أن $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$ — 0,5

ب. استنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتيها — 0,5

5) أ. بين أن لكل x من $]0,+\infty[$ ، $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ و استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) — 0,5

ب. أنشئ (Δ) و (C) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ — 1

6) أ. بين أن الدالة $H:x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$ — 0,5

ب. باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$ — 0,75

ج. أحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ — 0,5

الجزء الثاني	
لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$	
1) أ. بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$ $1\le u_n\le e$	0,5
ب. بين أن المتتالية (u_n) تزايدية	0,5
ج. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة	0,5
2) أحسب نهاية المتتالية (u_n)	0,75

تصحيح التمرين الأول :

1) أ. لدينا $\overrightarrow{AB}(-1,-1,2)$ و $\overrightarrow{AC}(0,-1,1)$

إذن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$

و منه : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

ب. لدينا : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,1,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)
تكتب على شكل : $(1)x+(1)y+(1)z+d=0$
و بما أن $A(1,-1,-1)\in(ABC)$ فإن $(1)(1)+(1)(-1)+(1)(-1)+d=0$ أي $d=1$
وبالتالي : $x+y+z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

(2

$$M(x,y,z)\in(S) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2+2y+z^2-2z=-1$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2-2z+1=-1+4+1+1$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5$$
$$\Leftrightarrow (x-(2))^2+(y-(-1))^2+(z-(1))^2=(\sqrt{5})^2$$

إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(2,-1,1)$ و أن شعاعها هو $R=\sqrt{5}$

3) أ. لدينا : $d(\Omega,(ABC)) = \dfrac{|(2)+(-1)+(1)+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

ب. بما أن $d(\Omega,(ABC)) < R$ ($R=\sqrt{5}$ شعاع الفلكة (S))

فإن : المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)

تصحيح التمرين الثاني :

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$:

لدينا : $\Delta = (-2)^2-4(1)(4) = -12$

إذن : $z = \dfrac{-(-2)-i\sqrt{12}}{2(1)} = \dfrac{2-i2\sqrt{3}}{2} = 1-i\sqrt{3}$ أو $z = \dfrac{-(-2)+i\sqrt{12}}{2(1)} = \dfrac{2+i2\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$

و منه $S = \left\{1-\mathrm{i}\sqrt{3}, 1+i\sqrt{3}\right\}$

2) أ. لدينا :

$$\begin{aligned} a-d &= (1-i\sqrt{3})-(-2+2\sqrt{3}) \\ &= 3-2\sqrt{3}-i\sqrt{3} \\ &= -\sqrt{3}(-\sqrt{3}+2+i) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} c-d &= (\sqrt{3}+i)-(-2+2\sqrt{3}) \\ &= -\sqrt{3}+2+i \end{aligned}$$

إذن : $a-d = -\sqrt{3}(c-d)$

ب. بما أن $\dfrac{a-d}{c-d} \in \mathbb{R}$ فإن النقط A و C و D مستقيمية

(3

$$z'-0=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-0)$$

$$z'=(\cos(\frac{-\pi}{3})+i\sin(\frac{-\pi}{3}))z$$

$$z'=(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})z$$

$$z'=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})z$$

$$z'=\frac{1}{2}az$$

4) أ. لدينا : H صورة النقطة B بالدوران R

إذن $h=\frac{1}{2}ab$

و منه

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})(2+2i) \\ &= (1-i\sqrt{3})(1+i) \\ &= 1+i-i\sqrt{3}+\sqrt{3} \\ &= (\sqrt{3}+1)+i(1-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

و لدينا :

$$\begin{aligned} ip &= i(a-c) \\ &= i(1-i\sqrt{3}-\sqrt{3}-i) \\ &= i+\sqrt{3}-i\sqrt{3}+1 \\ &= (\sqrt{3}+1)+i(1-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

و بالتالي : $h=ip$

ب. لدينا $h=ip$

إذن $\frac{h-0}{p-0}=\frac{h}{p}=i=1\times e^{i\frac{\pi}{2}}$

✓ لدينا $\left|\dfrac{h-0}{p-0}\right|=1$ إذن $\dfrac{OH}{OP}=1$ و منه : $OH=OP$

✓ و لدينا : $\arg\left(\dfrac{h-0}{p-0}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن $(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OH})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

و بالتالي : المثلث OHP قائم الزاوية و متساوي الساقين في O

تصحيح التمرين الثالث :

التجربة :" سحب عشوائيا و تآنيا ثلاث كرات من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا : $card\Omega=C_{10}^{3}=120$

1) A" الحصول على ثلاث كرات خضراء "

لدينا : $cardA=C_3^3=1$ إذن $p(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}=\dfrac{1}{120}$

B " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

أو

لدينا : $cardB=C_3^3+C_6^3=1+20=21$ إذن $p(A)=\dfrac{cardB}{card\Omega}=\dfrac{21}{120}=\dfrac{7}{40}$

2) <u>طريقة 1:</u>

C" الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون "

$\overline{C}$" الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثنى مثنى "

لدينا : $card\overline{C}=C_3^1\times C_6^1\times C_1^1=18$ إذن : $p(\overline{C})=\dfrac{card\overline{C}}{card\Omega}=\dfrac{18}{120}=\dfrac{3}{20}$

و بالتالي : $p(C)=1-p(\overline{C})=1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}$

طريقة 2:

C " الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون "

VVV أو $VV\overline{V}$ أو RRR أو $RR\overline{R}$

لدينا : $cardC=C_3^3+C_3^2\times C_7^1+C_6^3+C_6^2\times C_4^1=1+(3\times 7)+20+(15\times 4)=102$

إذن : $p(C)=\frac{cardC}{card\Omega}=\frac{102}{120}=\frac{17}{20}$

تصحيح المسألة :

الجزء الأول

1) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2=+\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}-\ln x=+\infty \quad (\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln x=-\infty)\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{1}{2}(\ln x)^2=+\infty\end{cases}$

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ فإن (C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

2) أ. ليكن x من $]0,+\infty[$

لدينا : $x+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}\ln x-1)\ln x=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\ln x)^2-\ln x=f(x)$

إذن : لكل x من $]0,+\infty[$: $f(x)=x+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}\ln x-1)\ln x$

ب. لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}\ln x-1)\ln x=+\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{2}=+\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln x-1=+\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \end{cases}$

ج.

✓ ليكن x من $]0,+\infty[$

لدينا : $\frac{(\ln x)^2}{x}=(\frac{\ln x}{\sqrt{x}})^2=(\frac{\ln\sqrt{x}^2}{\sqrt{x}})^2=(2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}})^2=4(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}})^2$

إذن : لكل x من $]0,+\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x}=4(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}})^2$

✓

$$\begin{pmatrix} t=\sqrt{x} \\ x\to+\infty \\ t\to+\infty \end{pmatrix} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}4(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}})^2=\lim_{t\to+\infty}4(\frac{\ln t}{t})^2=0$$

لأن : $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$

د. لدينا :

○ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

○ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{2x}-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x}=1$

لأن : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0 \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0 \end{cases}$

○ $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}\ln x-1)\ln x=+\infty$

إذن : (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المقارب المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$

3) أ.

✓ ليكن x من $]0,1[$: $(0<x\leq 1)$

لدينا : $x-1\leq 0$ و $\ln x\leq 0$

إذن : $(x-1)+\ln x\leq 0$ لكل x من $]0,1[$

✓ ليكن x من $[1,+\infty[$: $(x\geq 1)$

لدينا : $x-1\geq 0$ و $\ln x\geq 0$

إذن : $(x-1)+\ln x\geq 0$ لكل x من $[1,+\infty[$

ب. f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ كمجموع دوال قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

✓ ليكن x من $]0,+\infty[$

لدينا :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)' \\
&= 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\times\left(2\times\frac{1}{x}\times\ln x\right) \\
&= 1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x} \\
&= \frac{x-1+\ln x}{x}
\end{aligned}$$

إذن : لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{x-1+\ln x}{x}$

ج. لدينا لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{x-1+\ln x}{x}$

بما أن $x>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-1+\ln x$

و حسب نتيجة السؤال 3. أ.

على المجال $]0,1[$: $f'(x)\leq 0$ و على المجال $[1,+\infty[$: $f'(x)\geq 0$

<u>جدول تغيرات f :</u>

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3/2$	$\nearrow$	$+\infty$

4) أ. الدالة f' قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ كخارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ليكن x من $]0,+\infty[$

لدينا :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x-1+\ln x}{x}\right)' \\ &= \frac{(x-1+\ln x)'\times x-(x-1+\ln x)\times(x)'}{x^2} \\ &= \frac{(1+\frac{1}{x})x-\left(x-1+\ln x\right)}{x^2} \\ &= \frac{x+1-x+1-\ln x}{x^2} \\ &= \frac{2-\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

إذن : $f''(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب. لدينا $f''(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$

بما أن $x^2>0$ فإن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $2-\ln x$

x	0		$e2$		$+\infty$
$2-lnx$		$+$	0	$-$	

بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند e^2 فإن النقطة $I(e^2, f(e^2))$ هي نقطة انعطاف

و بالتالي $I(e^2,e^2+\dfrac{1}{2})$ هي نقطة انعطاف

5) أ.

ليكن x من $]0,+\infty[$

✓ لدينا :

$$\begin{aligned} f(x)-x &= x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2-x \\ &= \frac{1}{2}((\ln x)^2-2\ln x+1) \\ &= \frac{1}{2}(\ln x-1)^2 \end{aligned}$$

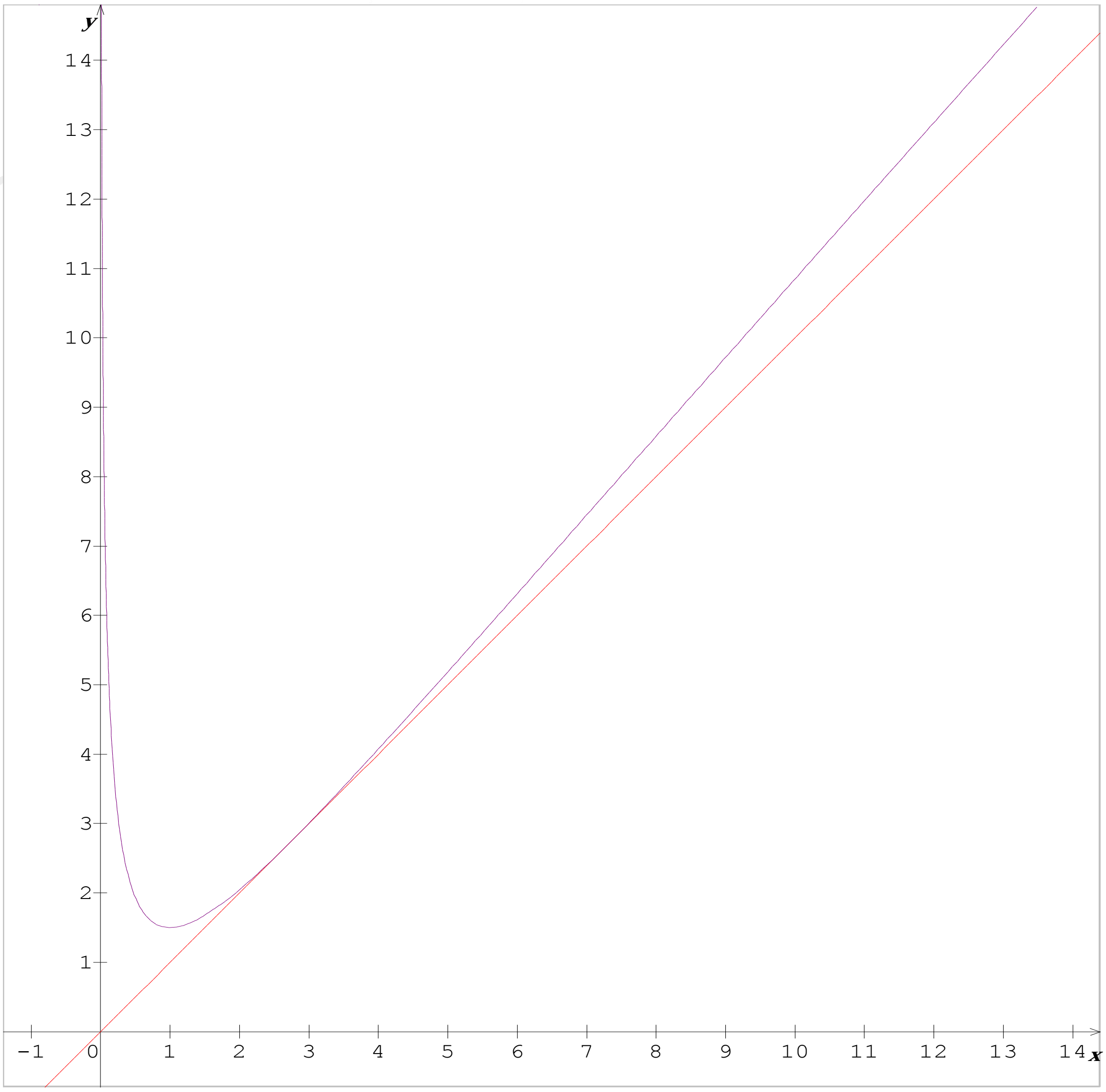
إذن : لكل x من $]0,+\infty[$ ، $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$

✓ بما أن $\frac{1}{2}(\ln x-1)^2\geq 0$

فإن $f(x)-x\geq 0$

و منه المنحنى (C) يوجد فوق المستقيم (Δ)

ب.



6) أ.

✓ H قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ كجداء و مجموع دوال قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

✓ ليكن x من $]0,+\infty[$

لدينا :

$$\begin{array}{rcl} H'(x) & = & (x\ln x - x)' \\ & = & x'\ln x + x\ln' x - 1 \\ & = & \ln x + x\times\frac{1}{x} - 1 \\ & = & \ln x + 1 - 1 \\ & = & \ln x \end{array}$$

إذن : لكل x من $]0,+\infty[$: $H'(x) = h(x)$

و بالتالي الدالة $H : x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \ln x$ على المجال $]0,+\infty[$

ب.

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 2\ln' x \ln x = \dfrac{2\ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} \int_1^e (\ln x)^2 dx & = & \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e 2\dfrac{\ln x}{x}\times x dx \\ & = & (e-0) - 2\int_1^e \ln x dx \\ & = & e - 2\left[x\ln x - x\right]_1^e \\ & = & e - 2(0-(-1)) \\ & = & e - 2 \end{array}$$

ج. مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^e |f(x)-x|dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\
&= \int_1^e (f(x)-x)dx \times 1cm \times 1cm \qquad (f(x)-x \geq 0) \\
&= \int_1^e (\frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2)dx.cm^2 \\
&= (\int_1^e \frac{1}{2}dx - \int_1^e \ln x dx + \frac{1}{2}\int_1^e (\ln x)^2 dx).cm^2 \\
&= (\left[\frac{x}{2}\right]_1^e - [x\ln x - x]_1^e + \frac{1}{2}(\mathrm{e}-2)).cm^2 \\
&= (\frac{e}{2} - \frac{1}{2} - (0-(-1)) + \frac{1}{2}(e-2))cm^2 \\
&= (e - \frac{5}{2})cm^2
\end{aligned}$$

الجزء الثاني

1) أ.

✓ من أجل $n=0$:

لدينا $u_0 = 1$

إذن $1 \leq u_0 \leq e$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

▷ نفترض أن : $1 \leq u_n \leq e$

▷ و نبين أن : $1 \leq u_{n+1} \leq e$

لدينا حسب الافتراض $1 \leq u_n \leq e$ و نعلم أن f متصلة و تزايدية على المجال $[1,\mathrm{e}]$

إذن : $f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$

إذن : $1 \leq \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq e$

✓ نستنتج أن لكل n من $\mathbb{N}$ $\quad 1 \leq u_n \leq e$

ب. نعلم أن لكل لكل x من $[1,\mathrm{e}]$ $\quad f(x)-x \geq 0$ و بما أن لكل n من $\mathbb{N}$ $\quad 1 \leq u_n \leq e$

فإن لكل n من $\mathbb{N}$ $\quad f(u_n) - u_n \geq 0$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} - u_n \geq 0$

و منه المتتالية (u_n) تزايدية

ج. بما أن المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة بالعدد e فإن المتتالية (u_n) متقاربة

2) لدينا : $u_0 = 1 \in [1,e]$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ f متصلة على المجال $[1,e]$

✓ لدينا $f([1,e]) = \left[\frac{3}{2},1\right]$ إذن $f([1,e]) \subset [1,e]$

✓ المتتالية (u_n) متقاربة

إذن نهاية المتتالية (u_n) هي حل للمعادلة $f(x) = x$

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow f(x) - x = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \end{aligned}$$

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$