~ الثانية علوم رياضية ~

سلسلة المتتاليات (2)

التمرين 1

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 \le u_n \le 3$
2) نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين بما يلي :
$v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$
بين أن : $v_{n+1} = 2 + \frac{v_n}{1+2v_n}$ و $w_{n+1} = 2 + \frac{w_n}{1+2w_n}$ و $w_n = 2 + \frac{1}{v_n}$
3) أ. أثبت أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n \le w_n$
ب. أدرس رتابة كل من المتتاليتين (v_n) و (w_n)
4) أ. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad w_{n+1} - v_{n+1} \le \frac{1}{25}(w_n - v_n)$
ب. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n - v_n)$
ج. بين أن المتتاليتان (v_n) و (w_n) متحاديتان و حدد نهايتهما
5) نضع $\alpha = 1 + \sqrt{2}$
أ. حدد عددا حقيقيا k بحيث : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \alpha| \le k|u_n - \alpha|$
ب. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها

التمرين 2

نعتبر الحدودية P_n المعرفة بما يلي : $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x - 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

1) بين أنه $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \quad (\exists! \varepsilon_n \in]0,1[) \quad P_n(\varepsilon_n) = 0$
2) بين أن المتتالية $(\varepsilon_n)_{n\ge2}$ تناقصية قطعا
3) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \quad 2\varepsilon_n - (\varepsilon_n)^{n+1} - 1 = 0$
4) بين أن المتتالية $(\varepsilon_n)_{n\ge2}$ متقاربة
5) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n$

التمرين 3

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a;b[$ بحيث : $f([a;b]) \subset [a;b]$

نفترض أنه : $(\exists k \in [0;1[) \quad (\forall x \in]a;b[) \quad |f'(x)| \le k$

1) بين أنه : $(\exists! \alpha \in [a;b]) \quad f(\alpha) = \alpha$

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 \in [a;b]$ و $(\forall n\in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = f(u_n)$

أ. بين أن : $(\forall n\in \mathbb{N}) \quad a \le u_n \le b$

ب. بين أن : $(\forall n\in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \alpha| \le k|u_n - \alpha|$

ج. استنتج نهاية المتتالية (u_n)

3) تطبيق : نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 \in [3;4]$ و $(\forall n\in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = 3 + \frac{1}{u_n}$

حدد نهاية المتتالية (u_n)

つづく