# الحساب التكاملي

## I. تكامل دالة متصلة على مجال:

### 1. تعريف :

**لتكن $f$ دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و $F$ دالة أصلية لها على $[a,b]$.**

**تكامل $f$ من $a$ إلى $b$ هو العدد الحقيقي :** $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

### 2. ملاحظات :

- نكتب $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$
- يمكن تغيير $x$ بأي متغير آخر مثلا : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = .....$

### 3. خاصيات :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

### 4. خطانية التكامل :

**خاصية :**

**لتكن $f$ و $g$ دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$ .لدينا :**

- $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $(\alpha \in \mathbb{R}) \quad \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

## II. التكامل و الترتيب :

### 1. خاصية :

لتكن $f$ و $g$ دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$ .لدينا :

- إذا كانت $f \geq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- إذا كانت $f \leq 0$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
- إذا كانت $f \leq g$ على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

### 2. القيمة المتوسطة :

**تعريف و خاصية :**

- لتكن $f$ دالة متصلة على مجال $[a,b]$ . العدد $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة ل $f$ على $[a,b]$
- يوجد على الأقل عدد $c$ من $[a,b]$ بحيث : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

## III. تقنيات حساب التكامل :

### أ. باستعمال دالة أصلية : سبق الحديث عنها في بداية الدرس

### ب. باستعمال المكاملة بالأجزاء:

**خاصية :**

لتكن $u$ و $v$ دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال $I$ حيث $u'$ و $v'$ متصلتان على $I$ و $a$ و $b$ عنصرين من $I$ لدينا :

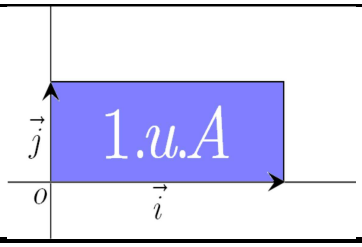
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

## IV. حساب المساحات :

ليكن المستوى منسوبا إلى معلم متعامد $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

وحدة المساحة $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة $O$ و المتجهتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$

$$1u.A=\left\|\vec{i}\right\|\times\left\|\vec{j}\right\|$$




### خاصية 1:

لتكن $f$ دالة متصلة على مجال $[a,b]$

مساحة الحيز المحصور بين $(C_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx\right)u.A$$

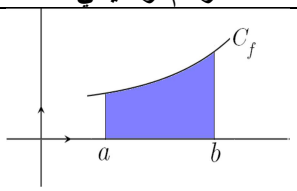
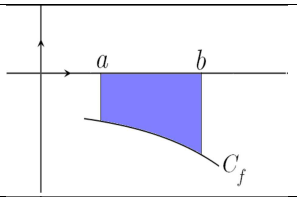
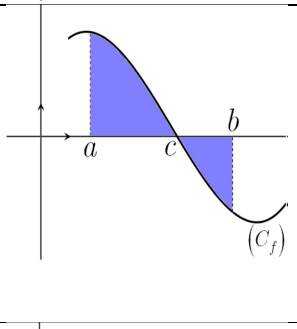
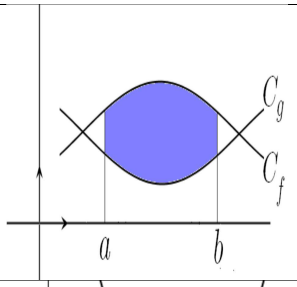
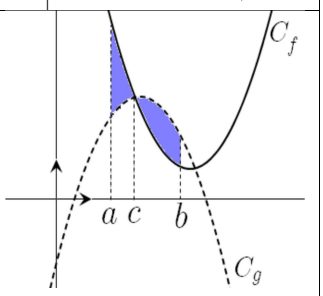
### خاصية 2:

لتكن $f$ و $g$ دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$

مساحة الحيز المحصور بين $(C_f)$ و $(C_g)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx\right)u.A$$

## حالات خاصة :

| رسم توضيحي | ملاحظات | مساحة الحيز الملون في الرسم هي: |
|---|---|---|
|  | $f$ موجبة على المجال $[a,b]$ | $\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.A$ |
|  | $f$ سالبة على المجال $[a,b]$ | $\left(\int_a^b -f(x)dx\right)u.A$ |
|  | • $f$ موجبة على المجال $[a,c]$<br>و<br>• $f$ سالبة على المجال $[c,b]$ | $\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx\right)u.A$ |
|  | $(C_f)$ يوجد فوق $(C_g)$ على المجال $[a,b]$ | $\left(\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right)u.A$ |
|  | • $(C_f)$ يوجد فوق $(C_g)$ على المجال $[a,c]$<br>و<br>• $(C_f)$ يوجد تحت $(C_g)$ على المجال $[c,b]$ | $\left(\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^b (g(x)-f(x))dx\right)u.A$ |