# ~ الثانية علوم رياضية ~

# سلسلة النهايات والاتصال #2

[8 تمارين محلولة]

**التمرين 1 :**

**بين أن الدالة $f$ تطبيق متصل و رتيب قطعا من المجال $I$ على المجال $J$ المطلوب إيجاده ثم حدد التطبيق العكسي:**

1) $f(x)=x|x| \quad I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{4}{4+x^2} \quad I=\mathbb{R}^-$

3) $f(x)=x-\sqrt{2x-1} \quad I=[1,+\infty[$

**التمرين 2 :**

**بين أن :**

أ. $\operatorname{Arc}\tan(x)+\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2} \quad (\forall x>0)$

ب. $\operatorname{Arc}\tan(x)+\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{\pi}{2} \quad (\forall x<0)$

**التمرين 3 :**

**نعتبر العددين** $a=\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{1}{2}\right)$ و $b=\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{4}{3}\right)$

1) **بين** $\tan(2a)=\tan(b)$

2) **استنتج أن** $2\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{1}{2}\right)=\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{4}{3}\right)$

**التمرين 4 :**

أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{Arc\tan\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{x-1}$

**التمرين 5 :**

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E): \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 12 = 0$

**التمرين 6 :**

أحسب النهايات التالية :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{8x}{x+1}}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2+x-1}$
3. $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt[3]{\dfrac{2x}{x-1}}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

**التمرين 7 :**

أحسب النهايات التالية :

1. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - 2x$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x^2+1} + x$ ( $n \in \mathbb{N}$ و $n > 2$ )

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x^2}}}$

6. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x - 1}}$

**التمرين 8 :**

**أحسب النهايتين التاليتين :**

**(1** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\cos\left(Arc\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)}{x}$

**(2** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left(Arc\tan\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{\pi}{2}\right)$

## تصحيح التمرين 1

1) $f(x)=x|x| \quad I=\mathbb{R}$

$f$ دالة متصلة على $I$ ( لأنها جداء دالتين متصلتين على $I$ )

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ;x\in[0,+\infty[ \\ -x^2 & ;x\in]-\infty,0] \end{cases}$$

الدالتين $x\mapsto x^2$ و $x\mapsto -x^2$ قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و $\mathbb{R}^-$

على المجال $[0,+\infty[$ : $f'(x)=2x$ و $f'_d(0)=0$

و على المجال $]-\infty,0]$ : $f'(x)=-2x$ و $f'_g(0)=0$

و بما أن $f'_d(0)=f'_g(0)$ فإن $f$ قابلة للاشتقاق في 0

نستنتج أن $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لكل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=2|x|$

لدينا $f'(x)\geq 0$ على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

إذن $f$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\nearrow$ | | |

بما أن $f$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ فإن $f$ تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $f(\mathbb{R})$

$$f(\mathbb{R})=f(]-\infty,+\infty[)=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=]-\infty,+\infty[$$

نستنتج أن $f$ تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

➢ <u>التطبيق العكسي</u> :

ليكن $y\in\mathbb{R}$ لنحدد $x\in\mathbb{R}$ بحيث $f(x)=y$

$$f(x)=y\Leftrightarrow x|x|=y$$

- إذا كان $y\in\mathbb{R}^+$ لنحدد $x$ من $\mathbb{R}^+$ بحيث $f(x)=y$

$$\begin{aligned} f(x)=y &\Leftrightarrow x^2=y \\ &\Leftrightarrow x=\sqrt{y} \quad \text{أو} \quad x=-\sqrt{y} \\ &\Leftrightarrow x=\sqrt{y} \quad (x\geq 0) \end{aligned}$$

- إذا كان $y \in \mathbb{R}_*^-$ لنحدد $x$ من $\mathbb{R}_*^-$ بحيث $f(x) = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow -x^2 = y$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{-y} \text{ أو } x = -\sqrt{-y}$$
$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{-y} \quad (x < 0)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \in \mathbb{R}^+ \\ -\sqrt{-x} & ; x \in \mathbb{R}_*^- \end{cases}$$

$f^{-1}(x) = Sg(x)\sqrt{|x|}$ ( نقصد ب $Sg(x)$ إشارة $x$ )

2) $f(x) = \dfrac{4}{4+x^2}$ $I = \mathbb{R}^-$

$f$ دالة متصلة على $\mathbb{R}^-$ لأنها قصور دالة جذرية

بما أن $f$ قصور دالة جذرية فإنها قابلة للاشتقاق على $I$

و لكل $x$ من $\mathbb{R}^-$ : $f'(x) = \dfrac{-2x}{(4+x^2)^2}$

بما أن $x \in \mathbb{R}^-$ فإن : $f'(x) \geq 0$

لدينا $f'(x) \geq 0$ و $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ إذن $f$ تزايدية قطعا على $I$

بما أن $f$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^-$ فإن $f$ تقابل من $\mathbb{R}^-$ نحو $f(\mathbb{R}^-)$

$$f(\mathbb{R}^-) = f(]-\infty, 0]) = \left]\lim_{x \to -\infty} f(x), f(0)\right] = ]0,1]$$

نستنتج أن $f$ تقابل من $\mathbb{R}^-$ نحو $]0,1]$

- التطبيق العكسي :

ليكن $y \in ]0,1]$ لنحدد $x$ من $\mathbb{R}^-$ بحيث $f(x) = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{4}{4+x^2} = y$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{y} - 4 \quad (y \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 4\left(\frac{1-y}{y}\right)$$

بما أن $y \in ]0,1]$ فإن $4\left(\dfrac{1-y}{y}\right) \geq 0$ إذن :

$$f(x)=y \Leftrightarrow x=2\sqrt{\frac{1-y}{y}} \text{ أو } x=-2\sqrt{\frac{1-y}{y}}$$

$$\Leftrightarrow x=-2\sqrt{\frac{1-y}{y}} \quad \left(x\in\mathbb{R}^-\right)$$

نستنتج أن التطبيق العكسي هو :

$$f^{-1}: \ ]0,1] \to \mathbb{R}^-$$
$$x \mapsto -2\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

(3

- لدينا : $f_1 : x \mapsto 2x-1$ متصلة و موجبة على $[1,+\infty[$

إذن : $\sqrt{f_1} : x \mapsto \sqrt{2x-1}$ متصلة على $[1,+\infty[$

و لدينا $f_2 : x \mapsto x$ متصلة على $[1,+\infty[$

و منه الدالة $f=f_2-\sqrt{f_1}$ متصلة على $[1,+\infty[$

- لدينا : $f_1 : x \mapsto 2x-1$ قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على $]1,+\infty[$

إذن : $\sqrt{f_1} : x \mapsto \sqrt{2x-1}$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$

و لدينا $f_2 : x \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$

و منه الدالة $f=f_2-\sqrt{f_1}$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$

و لكل $x$ من $]1,+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$

لدينا $f'(x)\geq 0$ على $]1,+\infty[$ و $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

إذن $f$ تزايدية قطعا على $I$

بما أن $f$ متصلة و تزايدية قطعا على $[1,+\infty[$ فإن $f$ تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $f\left([1,+\infty[\right)$

$$f\left([1,+\infty[\right)=\left[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=[0,+\infty[$$

$$\left(\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} x-|x|\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)\\ &= +\infty\end{aligned}\right)$$

نستنتج أن $f$ تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $[0,+\infty[$

- التطبيق العكسي :

ليكن $y\in[0,+\infty[$ لنحدد $x$ من $[1,+\infty[$ بحيث $f(x)=y$

$$\begin{aligned} f(x)=y &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2 = y\\ &\Leftrightarrow 2y=\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2\\ &\Leftrightarrow \sqrt{2y}=\left|\sqrt{2x-1}-1\right|\\ &\Leftrightarrow \sqrt{2y}=\sqrt{2x-1}-1 \quad \left(\sqrt{2x-1}-1\geq 0\right)\\ &\Leftrightarrow \sqrt{2y}+1=\sqrt{2x-1}\\ &\Leftrightarrow 2x-1=\left(\sqrt{2y}+1\right)^2\\ &\Leftrightarrow 2x=2y+2\sqrt{2y}+2\\ &\Leftrightarrow x=y+\sqrt{2y}+1\end{aligned}$$

نستنتج أن التطبيق العكسي هو :

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [0,+\infty[ & \to & [1,+\infty[\\ & x & \mapsto & x+\sqrt{2x}+1\end{array}$$

## تصحيح التمرين 2

أ. ليكن $x \in \mathbb{R}_*^+$

نضع : $Arc\tan x = y$ حيث $y \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

لدينا : $\tan y = x \quad \Leftrightarrow \quad Arc\tan x = y$

إذن

$$T = Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = y + Arc\tan\left(\frac{1}{\tan y}\right) = y + Arc\tan(\cot an(y)) = y + Arc\tan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right)$$

لدينا : $0 < y < \frac{\pi}{2}$ إذن $0 < \frac{\pi}{2} - y < \frac{\pi}{2}$

و منه $T = y + \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2}$

و بالتالي : $(\forall x > 0) \quad Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

ب. ليكن $x \in \mathbb{R}_*^-$

$$T = Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = -Arc\tan(-x) - Arc\tan\left(-\frac{1}{x}\right) = -\left[Arctan(-x) + Arc\tan\left(-\frac{1}{x}\right)\right]$$

لدينا : $-x \in \mathbb{R}_*^+$ إذن حسب نتيجة السؤال أ) : $T = -\frac{\pi}{2}$

و بالتالي : $(\forall x < 0) \quad Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

## تصحيح التمرين 3

1) لدينا : $\tan(2a)=\dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}=\dfrac{2\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$ و $\tan(b)=\tan\left(Arc\tan\left(\dfrac{4}{3}\right)\right)=\dfrac{4}{3}$

إذن $\tan(2a)=\tan(b)$

2) بما أن $1<\dfrac{1}{2}>0$ و $a=Arc\tan\left(\dfrac{1}{2}\right)$ فإن $0<a<\dfrac{\pi}{4}$ إذن $\underline{\underline{0<2a<\dfrac{\pi}{2}}}$

و بما أن $1<\dfrac{4}{3}$ فإن $\underline{\underline{\dfrac{\pi}{4}<b<\dfrac{\pi}{2}}}$

و حسب نتيجة السؤال 1) : $\underline{\underline{\tan(2a)=\tan(b)}}$

ومنه : $2a=b$

و بالتالي : $2Arc\tan\left(\dfrac{1}{2}\right)=Arc\tan\left(\dfrac{4}{3}\right)$

## تصحيح التمرين 4

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{Arc\tan\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{Arc\tan\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}\times\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}$

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{Arc\tan\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{\substack{t\to0\\t>0}}\dfrac{Arc\tan(t)}{t}=\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}}\dfrac{h}{\tan(h)}=1$

و لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}-\sqrt{\dfrac{1-x^2}{(1-x)^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}-\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=-\infty$

إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{Arc\tan\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{x-1}=-\infty$

## تصحيح التمرين 5

لتكن $(S)$ مجموعة حلول المعادلة $(E)$

نضع $x=t^6$

$$\begin{aligned} x\in(S) &\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-12=0\\ &\Leftrightarrow \sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}-12=0\\ &\Leftrightarrow t^3+t^2-12=0\\ &\Leftrightarrow (t-2)(t^2+3t+6)=0\\ &\Leftrightarrow t-2=0 \text{ أو } t^2+3t+6=0\\ &\Leftrightarrow t=2\end{aligned}$$

المعادلة $t^2+3t+6=0$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$ لأن $\Delta=-15<0$

إذن : $x=t^6=2^6=64$ و منه $S=\{64\}$

## تصحيح التمرين 6

1. لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x}{x}=8$ و لدينا الدالة $x\to\sqrt[3]{x}$ متصلة في 8

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{8x}{x+1}}=\sqrt[3]{8}=2$

2. لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+x-1=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2+x-1}=+\infty$

3.

لدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}2x=2\\ \lim\limits_{x\to1^+}x-1=0^+\end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x}{x-1}=+\infty$

و منه $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt[3]{\dfrac{2x}{x-1}}=+\infty$

4. $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^3-x^3}{\sqrt[3]{x^3+1}^2+x.\sqrt[3]{x^3+1}+1^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1-x^3}{\sqrt[3]{x^3+1}^2+x.\sqrt[3]{x^3+1}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}^2+x.\sqrt[3]{x^3+1}+1}=0$$

5. $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}^3-1^3}{x\left(\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x\left(\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1}=\frac{1}{3}$$

## تصحيح التمرين 7

.1 $$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}^3-2^3}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x}^2+2.\sqrt[3]{x}+4\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2+2.\sqrt[3]{x}+4}=\frac{1}{12}$$

.2 لدينا : $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-2x=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}-2x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}-2\right)=-\infty$$

لأن : $$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}-2=-1\end{cases}$$

.3 لدينا : $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}-\frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}$$

✓ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}^3-1^3}{x\left(\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1}=\frac{1}{3}$$

✓ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+1}^4-1^4}{x\left(\sqrt[4]{x+1}^3+\sqrt[4]{x+1}^2+\sqrt[4]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[4]{x+1}^3+\sqrt[4]{x+1}^2+\sqrt[4]{x+1}+1}=\frac{1}{4}$$

و منه : $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

.4 لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\sqrt[n]{x^2+1}+x&=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[n]{x^2+1}-(-x)\\&=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\frac{\sqrt[n]{x^2+1}}{-x}-1\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt[n]{\frac{x^2+1}{(-x)^n}}-1\right)\\&=-\infty\end{aligned}$$

لأن: $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{(-x)^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{(-x)^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(-x)^{n-2}}=0$$

.5 نضع $t=\sqrt[3]{x}$ لدينا : $x\to+\infty\Leftrightarrow t\to+\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2}}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{\sqrt[3]{t^3+t^2}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{t}}}=1$

.6 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\left(1-\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\left(1-\sqrt[6]{x-1}\right)=+\infty$

## تصحيح التمرين 8

(1

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\cos\left(Arc\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-Arc\tan(x)\right)}{x}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\sin\left(Arc\tan(x)\right)}{Arc\tan(x)}\times\dfrac{Arc\tan(x)}{x}$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\cos\left(Arc\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)}{x}=1$

(2 لدينا :

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(Arc\tan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(-Arc\tan\left(x^2\right)\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}-x\times\dfrac{Arc\tan\left(x^2\right)}{x^2}$

إذن : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(Arc\tan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

つづく