تمرين 1 : الأعداد العقدية

تمرين

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$. (الوحدة $2cm$). نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي :

$z_A=-2i$ و $z_B=-\sqrt{3}+i$ و $z_C=\sqrt{3}+i$

1) أ. أكتب z_A و z_B و z_C على الشكل الأسي

ب. استنتج مركز و شعاع الدائرة (Γ) المارة من A و B و C .

2) أ. أكتب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي

ب. استنتج طبيعة المثلث ABC

3) ليكن r الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$

أ. بين أن o' لحق النقطة O' صورة النقطة O بالدوران r هو $-\sqrt{3}-i$

ب. حدد المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث : $|z|=\left|z+\sqrt{3}+i\right|$

ج. بين أن A و B تنتميان ل (E)

التصحيح

1) أ.

- لدينا : $|z_A|=|-2i|=2$

إذن $z_A=2(-i)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$

و منه $z_A=2e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}$

- لدينا : $|z_B|=\left|-\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}=2$

إذن

$$z_B=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)=2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

و منه $z_B=2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$

- لدينا : $|z_C| = |\sqrt{3}+i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2} = 2$

إذن $z_C = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

و منه $z_C = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

ب. حسب نتيجة السؤال 1) لدينا : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$

إذن $OA = OB = OC = 2$

و منه A و B و C تنتمي للدائرة (Γ) التي مركزها O و شعاعها $R = 2$

2)

أ.

- لدينا : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(\sqrt{3}+i)-(-2i)}{(-\sqrt{3}+i)-(-2i)} = \frac{\sqrt{3}+3i}{-\sqrt{3}+3i} = \frac{(\sqrt{3}+3i)(-\sqrt{3}-3i)}{(-\sqrt{3}+3i)(-\sqrt{3}-3i)}$

إذن : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-3-3\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i+9}{(-\sqrt{3})^2+3^2} = \frac{6-6\sqrt{3}i}{12} = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

- لدينا : $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

إذن $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \left(\frac{1}{2}\right)+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$

و منه $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = 1e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$

ب. لدينا $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ إذن $\frac{AB}{AC} = 1$ و منه $AB = AC$

و لدينا : $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ إذن $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

بما أن : $\begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ فإن المثلث ABC متساوي الأضلاع

3) ليكن r الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$

أ. لدينا $r(O)=O'$ إذن $o'-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(o-z_A)$

إذن : $o'-(-2i)=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0-(-2i))$

إذن : $o'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(2i)-2i=i-\sqrt{3}-2i$

و بالتالي : $o'-\sqrt{3}-i$

ب. لنحدد المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث : $|z|=|z+\sqrt{3}+i|$

لدينا : $|z|=|z+\sqrt{3}+i|\Leftrightarrow|z-0|=\left|z-\left(-\sqrt{3}-i\right)\right|$

إذن $|z|=|z+\sqrt{3}+i|\Leftrightarrow|z-0|=|z-o'|$

أي $OM=O'M$ و منه المجموعة (E) هي واسط القطعة $[OO']$

ج.

- لدينا $|z_A|=2$ و $|z_A+\sqrt{3}+i|=|-2i+\sqrt{3}+i|=|\sqrt{3}-i|=2$

  إذن $|z_A|=|z_A+\sqrt{3}+i|$ و منه $A\in(E)$
- لدينا $|z_B|=2$ و $|z_B+\sqrt{3}+i|=\left|\left(-\sqrt{3}+i\right)+\sqrt{3}+i\right|=|2i|=2$

  إذن $|z_B|=|z_B+\sqrt{3}+i|$ و منه $B\in(E)$