

# درس الاتصال

## (الثانية علوم تجريبية)

### (1) تذكير : النهايات

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوجي} \\ -\infty & n \text{ فردي} \end{cases} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty : \text{ لدينا } N^* \text{ لكل } n \text{ من}$$

2. نهاية دالة حدودية عند  $+\infty$  أو  $-\infty$  هي نهاية حددها الأعلى درجة

3. نهاية دالة جذرية هي خارج نهاية حددها الأعلى درجة في البسط على حددها الأعلى درجة في المقام

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

5. جداول النهايات:

$\lim f$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	$l$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim f \times g$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	$l \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	$0$	$0$

$\lim f$	$l$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$l$	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l' \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$0$	شكل غير محدد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

## (2) اتصال دالة في عدد :

## تعريف 1:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f \text{ متصلة في } a$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 8 \end{array} \right. : \text{مثال : أدرس اتصال الدالة } f \text{ في العدد } a = 1$$

لدينا :  $f(1) = 8$  .لنحسب  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 7)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 7) = 8$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  فإن  $f$  متصلة في العدد 1.

تعريف 2:

✓  $f$  متصلة في  $a$  على اليمين  $\Leftrightarrow$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$$

✓  $f$  متصلة في  $a$  على اليسار  $\Leftrightarrow$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$$

✓  $f$  متصلة في  $a$   $\Leftrightarrow$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$$

$$\text{مثال : أدرس اتصال الدالة } f \text{ في العدد } a=0 : \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} & ; x > 0 \\ f(x) = x^2 - x + 2 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

لدينا :  $f(0) = (0)^2 - (0) + 2 = 2$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} = 2$$

لنحسب  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

لنحسب  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 - x + 2 = 2$$

بما أن :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = f(0)$

(3) الإتصال على مجال :خاصيات :

- $f$  متصلة على مجال  $]a, b[$  يعني  $f$  متصلة في جميع عناصر المجال  $]a, b[$
- $f$  متصلة على مجال  $[a, b]$  يعني  $f$  متصلة في جميع عناصر المجال  $]a, b[$  و متصلة على يمين  $a$  و متصلة على يسار  $b$
- $f$  متصلة على مجال  $]a, b[$  يعني  $f$  متصلة في جميع عناصر المجال  $]a, b[$  و متصلة على يمين  $a$
- $f$  متصلة على مجال  $[a, b]$  يعني  $f$  متصلة في جميع عناصر المجال  $]a, b[$  و متصلة على يسار  $b$

(4) العمليات على الدوال المتصلة

- الدوال الحدودية متصلة على  $\mathbb{R}$
- الدوال الجذرية متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- الدوال المثلثية  $\sin$  و  $\cos$  متصلتان على  $\mathbb{R}$
- دالة  $\tan$  متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- إذا كانت  $f$  و  $g$  متصلتان على مجال  $I$  فإن  $f + g$  و  $f \times g$  متصلتان على  $I$
- إذا كانت  $f$  و  $g$  متصلتان على مجال  $I$  و  $g \neq 0$  على  $I$  فإن  $\frac{f}{g}$  و  $\frac{1}{g}$  متصلتان على  $I$ .
- إذا كانت  $f$  متصلة على مجال  $I$  و  $f \geq 0$  على  $I$  فإن  $\sqrt{f}$  متصلة على  $I$ .
- إذا كانت  $f$  متصلة على مجال  $I$  و  $g$  متصلة على  $J$  بحيث  $f(I) \subset J$  فإن  $g \circ f$  متصلة على  $I$

أمثلة :

$$1. \quad f : x \mapsto x^3 - \frac{1}{2}x + 1 \text{ متصلة على } \mathbb{R}$$

$$2. \quad f : x \mapsto \frac{2x}{x-2} \text{ متصلة على كل مجال ضمن } ]-\infty, 2[ \cup ]2, +\infty[ \text{ لأن } D_f \text{ دالة جذرية}$$

$$3. \quad f : x \mapsto \cos x + x^2 - 7x + 3$$

$$\text{لدينا : } f_1 : x \mapsto \cos x \text{ متصلة على } \mathbb{R} \text{ و } f_2 : x \mapsto x^2 - 7x + 3 \text{ متصلة على } \mathbb{R}$$

$$\text{إذن } f = f_1 + f_2 \text{ متصلة على } \mathbb{R} \text{ كمجموع لدالتين متصلتين على } \mathbb{R}$$

$$4. \quad f : x \mapsto (x-1) \times \sin x$$

$$\text{لدينا : } f_1 : x \mapsto x-1 \text{ متصلة على } \mathbb{R} \text{ و } f_2 : x \mapsto \sin x \text{ متصلة على } \mathbb{R}$$

$$\text{إذن } f = f_1 \times f_2 \text{ متصلة على } \mathbb{R} \text{ كجداء لدالتين متصلتين على } \mathbb{R}$$

$$5. \quad f : x \mapsto \sqrt{x-2}$$

لدينا  $f_1: x \mapsto x - 2$  متصلة على  $[2, +\infty[$  و لكل  $x$  من  $[2, +\infty[$  :  $f_1(x) \geq 0$

إذن  $f = \sqrt{f_1}$  متصلة على  $[2, +\infty[$

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} \quad .6$$

لدينا  $f_1: x \mapsto \sqrt{x}$  متصلة على  $\mathbb{R}^+$

و لدينا  $f_2: x \mapsto x^2 + 1$  متصلة على  $\mathbb{R}$  بالخصوص على  $\mathbb{R}^+$  و لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^+$  :  $f_2(x) \neq 0$

إذن  $f = \frac{f_1}{f_2}$  متصلة على  $\mathbb{R}^+$ .

$$f : x \mapsto \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{7}\right) \quad .7$$

لدينا  $f_1: x \mapsto x^2 + \frac{\pi}{7}$  حدودية متصلة على  $\mathbb{R}$  بحيث  $f_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  و الدالة  $f_2: x \mapsto \sin(x)$  متصلة

على  $\mathbb{R}$

إذن  $f = f_2 \circ f_1$  متصلة على  $\mathbb{R}$

math.ma

(5) صورة مجال بدالة متصلة ورتبية قطعا

$f(I)$	المجال $I$	
$[f(a), f(b)]$	$[a, b]$	f تزايدية قطعا
$[f(a), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x)]$	$[a, b[$	
$[\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), f(b)]$	$]a, b]$	
$[\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x)]$	$]a, b[$	
$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a)]$	$] -\infty, a]$	
$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)]$	$] -\infty, a[$	
$[f(b), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[b, +\infty[$	
$[\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$]b, +\infty[$	
$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$] -\infty, +\infty[$	
$[f(b), f(a)]$	$[a, b]$	
$[\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x), f(a)]$	$[a, b[$	
$[f(b), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)]$	$]a, b]$	
$[\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)]$	$]a, b[$	
$[f(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$	$] -\infty, a]$	
$[\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$	$] -\infty, a[$	
$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(b)]$	$[b, +\infty[$	
$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} f(x)]$	$]b, +\infty[$	
$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$	$] -\infty, +\infty[$	

## مثال 1:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

لدينا :  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$

لنحدد صور المجالات التالية :  $[2;3]$  و  $]1;+\infty[$  و  $]1;4[$  و  $]0;1[$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن  $D_f$  ( لأنها دالة جذرية )

ليكن  $x \in D_f$

$$f'(x) = \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)' = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2 \cdot (x-1) - (2x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

إذن :  $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$  ( $\forall x \in D_f$ ) . من الواضح أن  $f'(x) < 0$  ( $\forall x \in D_f$ ) و منه الدالة  $f$  تناقصية قطعاً

على  $D_f$

$$f([2;3]) = [f(3); f(2)] = \left[ \frac{7}{2}; 5 \right]$$

$$f(]1;+\infty[) = \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \right] = ]2; +\infty[$$

$$f(]-\infty;1[) = \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right] = ]-\infty; 2[$$

$$f(]1;4]) = \left[ f(4); \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \right] = [3; +\infty[$$

$$f(]0;1[) = \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x); f(0) \right] = ]-\infty; -1]$$

## مثال 2:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = x^3 + 7x - 2$   
 الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية  
 ليكن  $x \in \mathbb{R}$  :  $f'(x) = (x^3 + 7x - 2)' = 3x^2 + 7$  إذن  $f'(x) > 0$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ )  
 و منه الدالة  $f$  تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$

لنحدد صور المجالات التالية :  $]-\infty; +\infty[$  و  $[1; 3]$

$$f(]-\infty; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = ]-\infty; +\infty[$$

$$f([1; 3]) = [f(1); f(3)] = [6; 46]$$

(6) مبرهنة القيم الوسيطة :

إذا كانت  $f$  متصلة على  $[a; b]$  فإنه لكل  $\lambda$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  يوجد على الأقل  $c$  من  $[a; b]$  بحيث  
 $f(c) = \lambda$  :

نتائج :

▪ مبرهنة القيم الوسيطة (وجودية الحل على  $[a; b]$ )

إذا كانت  $f$  متصلة على  $[a; b]$  و  $f(a) \times f(b) < 0$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً على الأقل في المجال  
 $]a; b[$

مثال :

لنبين أن المعادلة :  $x^4 + x - 3 = 0$  تقبل حلاً على الأقل في  $]0; 2[$

✓ نعتبر الدالة  $f$  المعرفة ب :  $f(x) = x^4 + x - 3$

• الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$  (لأنها دالة حدودية) بالخصوص على المجال  $[0; 2]$

• لدينا  $f(0) = -2$  و  $f(2) = 15$  إذن  $f(0) \times f(2) < 0$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة :  $f(x) = 0$  تقبل حلا على الأقل في  $]0;2[$

▪ مبرهنة القيم الوسيطة بالوحدانية ( وجودية ووحدانية الحل على  $]a,b[$  )

إذا كانت  $f$  متصلة و رتيبة قطعاً على  $]a,b[$  و  $f(a) \times f(b) < 0$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً في المجال  $]a,b[$

مثال :

لنبين أن المعادلة  $x^3 + 2x = 1$  تقبل حلاً وحيداً في المجال  $[0,1]$  ( $x^3 + 2x = 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 1 = 0$ )

✓ نعتبر الدالة  $f$  المعرفة ب :  $f(x) = x^3 + 2x - 1$

• الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$  ( لأنها دالة حدودية ) بالخصوص على المجال  $[0,1]$

• الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ( لأنها دالة حدودية ) بالخصوص على المجال  $[0,1]$

ليكن  $x \in [0;1]$  :  $f'(x) = (x^3 + 2x - 1)' = 3x^2 + 2$

إذن :  $f'(x) > 0$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) و منه  $f$  تزايدية قطعاً على  $[0,1]$

•  $f(0) = -1$  و  $f(1) = 2$  إذن  $f(0) \times f(1) < 0$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطة بالوحدانية فإن المعادلة :  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً في  $[0;1]$

▪ مبرهنة (وجودية ووحداية الحل على مجال  $I$ )

إذا كانت  $f$  متصلة ورتبية قطعاً على  $I$  و  $0 \in f(I)$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً في المجال  $I$

مثال :

لنبين أن المعادلة  $2x^3 + 5x - 4 = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$  ثم تحقق أن  $0 < \alpha < 1$

✓ نعتبر الدالة  $f$  المعرفة ب :  $f(x) = 2x^3 + 5x - 4$

• الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$  (لأنها دالة حدودية)

• الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  (لأنها دالة حدودية)

ليكن  $x \in \mathbb{R}$  :  $f'(x) = (2x^3 + 5x - 4)' = 3x^2 + 5$

إذن :  $f'(x) > 0$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) و منه  $f$  تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$

• لنحسب  $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = ]-\infty; +\infty[ = \mathbb{R}$

إذن :  $0 \in f(\mathbb{R})$

و بالتالي المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$

✓ لنتحقق أن  $0 < \alpha < 1$  :

• الدالة  $f$  متصلة  $[0, 1]$

•  $f(0) = -4$  و  $f(1) = 3$  إذن  $f(0) \times f(1) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن :  $0 < \alpha < 1$

(7) الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعاً :خاصية :

إذا كانت  $f$  دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال  $I$  فإن  $f$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}$  معرفة من مجال  $J = f(I)$  نحو  $I$

نتائج:

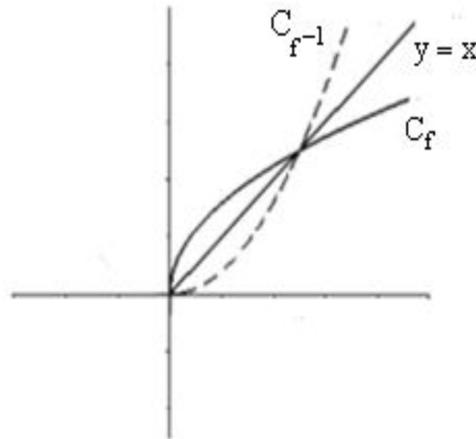
$$(1) \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} f^{-1} \circ f(x) = x & ; x \in I \\ f \circ f^{-1}(x) = x & ; x \in J \end{cases}$$

خاصيات:

لتكن  $f$  دالة و  $f^{-1}$  دالتها العكسية على المجال  $J$  لدينا :

- $f^{-1}$  متصلة على المجال  $J$
- $f$  و  $f^{-1}$  لهما نفس الرتبة
- منحنى  $f^{-1}$  هو مماثل لمنحنى  $f$  بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة  $y = x$  ( المنصف الأول للمعلم )



مثال :

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{3x+5}{x+1}$

• لنبين أن  $g$  قصور  $f$  على المجال  $[0;1]$  تقبل دالة عكسية  $g^{-1}$  معرفة على مجال  $J$  يتم تحديده :

✓  $g$  قصور دالة جذرية معرفة على المجال  $[0;1]$  إذن  $g$  متصلة على  $[0;1]$

✓  $g$  قصور دالة جذرية معرفة على المجال  $[0;1]$  إذن  $g$  قابلة للاشتقاق على  $[0;1]$

$$g'(x) = \left( \frac{3x+5}{x+1} \right)' = \frac{-2}{(x+1)^2} : x \in [0;1]$$

إذن :  $g'(x) < 0$  ( $\forall x \in [0;1]$ ) و منه  $g$  تناقصية قطعاً على  $[0;1]$

و بالتالي  $g$  تقبل دالة عكسية  $g^{-1}$  معرفة على مجال  $J$  نحو  $[0;1]$

$$J = g([0;1]) = [g(1); g(0)] = [4;5]$$

• لنحدد :  $g^{-1}(x)$  ( $\forall x \in J$ )

✓ ليكن  $x \in J = [4;5]$

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y) \quad (y \in I = [0;1])$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3y+5}{y+1}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (y+1) = 3y+5$$

$$\Leftrightarrow xy + x = 3y + 5$$

$$\Leftrightarrow xy - 3y = 5 - x$$

$$\Leftrightarrow y \cdot (x - 3) = 5 - x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5-x}{x-3}$$

$$(\forall x \in J = [4;5]) \quad g^{-1}(x) = \frac{5-x}{x-3} \quad \text{إذن :}$$

(8) الجذر من الرتبة  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

أ. تعريف :

ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$

الدالة العكسية للدالة  $x \mapsto x^n$  على المجال  $[0, +\infty[$  تسمى دالة الجذر من الرتبة  $n$  و نرسم لها ب :  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$   
الدالة  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  متصلة و تزايدية قطعاً على  $[0, +\infty[$

ب. أمثلة :

$$(n=1) \quad \sqrt{x} = x$$

$$(n=2) \quad \sqrt[2]{x} = \sqrt{x} \quad (\text{الجذر المربع})$$

$$(n=3) \quad \sqrt[3]{x} \quad (\text{الجذر المكعب})$$

ج. خصائص :

ليكن  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين موجبان. لدينا :

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x^m} \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x} \quad \sqrt[n]{x^n} = x \quad (\sqrt[n]{x})^n = x$$

$$(y \neq 0) \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad \sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

أمثلة :

أ. لنبسب ما يلي :

$$a = \sqrt[3]{27} \quad b = \sqrt[4]{16} \quad c = \sqrt{\sqrt[3]{729}}$$

$$a = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$b = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$c = \sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^6}} = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

ب. قارن العددين :  $x = \sqrt[3]{4}$  و  $y = \sqrt[4]{5}$

لدينا :  $x = \sqrt[3]{4} = \sqrt[3 \times 4]{4^4} = \sqrt[12]{256}$  و  $y = \sqrt[4]{5} = \sqrt[4 \times 3]{5^3} = \sqrt[12]{125}$

بما أن  $125 < 256$  فإن  $\sqrt[12]{125} < \sqrt[12]{256}$  و منه  $y < x$

ج. اجعل مقام العدد التالي جذريا :  $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1} = \frac{1}{(\sqrt[3]{4})^3 - 1^3} = \frac{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} + 1^2}{(\sqrt[3]{4})^3 - 1^3} = \frac{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} + 1}{4-1} = \frac{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} + 1}{3}$$

د. خاصية:

لتكن  $f$  دالة و  $n \in \mathbb{N}^*$

➤ إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

➤ إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  و  $l \geq 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

➤ إذا كانت  $f$  متصلة و موجبة على مجال  $I$  فإن  $\sqrt[n]{f}$  متصلة على  $I$

أمثلة:

1. لنحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$  :

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 + x - 1} = +\infty$

2. لنحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{8x}{x+1}}$  :

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{x} = 8$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{8x}{x+1}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

3. لندرس اتصال الدالة :  $h : x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$

لدينا :  $f : x \mapsto x^2$  متصلة على  $\mathbb{R}$  و  $f(x) \geq 0$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ )

إذن الدالة  $h = \sqrt[3]{f}$  متصلة على  $\mathbb{R}$

### (9) القوى الجذرية لعدد حقيقي:

أ. تعريف:

ليكن  $n$  و  $m$  من  $\mathbb{N}^*$  و  $x > 0$  لدينا:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

أمثلة:

$$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} \quad \bullet$$

$$4^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{4^5}} = \frac{1}{\sqrt[2]{2^{10}}} = \frac{1}{2^{10}} \quad \bullet$$

ب. خاصية:

لكل عددين حقيقيين موجبين قطعاً  $x$  و  $y$  و لكل  $r$  و  $r'$  من  $\mathbb{Q}^*$ :

$$(x^r)^{r'} = x^{r \cdot r'} \quad \bullet \quad x^r \cdot y^r = (x \cdot y)^r \quad \bullet \quad x^{r+r'} = x^r \cdot x^{r'} \quad \bullet$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad \bullet \quad \frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r \quad \bullet \quad \frac{1}{x^r} = x^{-r} \quad \bullet$$

مثال:

$$A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{8}} \times \sqrt[4]{\sqrt{32}}}{\sqrt{2} \times \sqrt[12]{64}} \quad \text{لنبسط العدد}$$

$$A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{8}} \times \sqrt[4]{\sqrt{32}}}{\sqrt{2} \times \sqrt[12]{64}} = \frac{\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(32^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 64^{\frac{1}{12}}} = \frac{8^{\frac{1}{6}} \times 32^{\frac{1}{8}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 64^{\frac{1}{12}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{6}} \times (2^5)^{\frac{1}{8}}}{2^{\frac{1}{2}} \times (2^6)^{\frac{1}{12}}} = \frac{2^{\frac{3}{6}} \times 2^{\frac{5}{8}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{6}{12}}} = \frac{\sqrt[2]{2} \times \sqrt[8]{2^5}}{\sqrt{2} \times \sqrt[2]{2}} = 2^{\frac{5}{8} - \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2}$$

つづく