# النهايات والاتصال

## السلسلة 1 (16 تمرين)

**تمرين 1 :**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2-2x\cos(x)+1}$

1. بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(x)}{x}=0$
2. استنتج ما يلي :

أ. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ب. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

**تمرين 2 :**

ليكن $m$ بارامتر حقيقي ، أدرس النهايتين التاليتين :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+2x-5}+mx-1$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-5}+mx-1$

**تمرين 3 :**

نعتبر الدالة $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{x+x^2+........+x^n-n}{x-1}\quad(n\in\mathbb{N}^*)$

1. حدد النهاية : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^k-1}{x-1}\quad(k\in\mathbb{N}^*)$
2. استنتج النهاية : $\lim\limits_{x\to1}f(x)$

**تمرين 4 :**

أدرس النهايات التالية :

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan(x)-1}{2\cos(x)-\sqrt{2}}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(2x)-\cos(4x)}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{\cos(x)-\cos(a)}$ ( $a$ عدد حقيقي )

**تمرين 5 :**

لتكن $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x\sin\left(\dfrac{2}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. بين أن الدالة $f$ في النقطة 0
2. بين أن الدالة $f$ متصلة على $\mathbb{R}$.

**تمرين 6 :**

أدرس اتصال الدوال التالية :

1) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-6x+5}$ 2) $f(x) = x^2 - 2|x|$

3) $f(x) = \dfrac{|x|-1}{\sqrt{x}-1}$ 4) $f(x) = E(x)$

**تمرين 7 :**

نعتبر الدالة $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (x^2-1)\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & ; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

1) حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$
2) بين أن : $|f(x) - f(1)| \leq 3|x-1|$ $(\forall x \in ]0,2[)$
3) استنتج أن الدالة $f$ متصلة في النقطة $x_0 = 1$

**تمرين 8 :**

أدرس اتصال الدوال الآتية :

1) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ 2) $f(x) = |x^3 - 2x^2 + 1|$

3) $f(x) = \sin(x^2 + x)$ 4) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

**تمرين 9 :**

أدرس نهاية الدوال الآتية في النقطة $x_0$

1) $|x_0| = +\infty \quad f(x) = 3x^3 + x - 1$

2) $x_0 = 1 \quad f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x-1)(x+3)}$

3) $|x_0| = +\infty \quad f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 1}{x+1}$

4) $|x_0| = +\infty \quad f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x+1} - x$

5) $x_0 = -1 \quad f(x) = \dfrac{|x+1|x}{x^2 - 1}$

6) $x_0 = 0 \quad f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

7) $x_0 = 1 \quad f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{(x-1)^2(3x-1)}$

8) $x_0 = 0 \quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

**تمرين 10 :**

أدرس نهاية الدوال الآتية في $x_0 = 0$

1) $f(x) = \dfrac{E(x)}{x}$

2) $f(x) = \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$

3) $f(x) = \dfrac{\tan(3x)}{\sin(2x)}$

4) $f(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

**تمرين 11 :**

أدرس نهاية الدوال الآتية في النقطة $x_0$

1) $x_0 = +\infty \quad f(x) = x - \sin x$

2) $|x_0| = +\infty \quad f(x) = E(x)$

**تمرين 12 :**

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}$

1) $f(x)=2x^3+5x-4$

2) $f(x)=1+\sin x-x$

3) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{2}\cos x$

**تمرين 13 :**

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة ب : $f(x)=x^4-\dfrac{4}{x}$

بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا على الأقل في $[1,2]$

**تمرين 14 :**

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و متصلة على $I$

بين أنه إذا كانت $f$ لا تنعدم في $I$ فإن لدينا : $\left[(\forall x\in I)\quad f(x)>0\right]$ أو $\left[(\forall x\in I)\quad f(x)<0\right]$

**تمرين 15 :**

لتكن $f$ دالة عددية متصلة على المجال $[0,1]$ و معرفة من $[0,1]$ نحو $[0,1]$.

بين أنه لكل $n$ من $n$ يوجد $\alpha_n$ من $[0,1]$ بحيث : $f(\alpha_n)=\alpha_n^n$

**تمرين 16 :**

لتكن $f$ دالة متصلة و معرفة من مجال $[a;b]$ نحو $[a;b]$.

بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a;b]$

## تصحيح التمرين 1

1. لدينا : $\left|\cos(x)\right| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ إذن $\left|\dfrac{\cos(x)}{x}\right| \leq \dfrac{1}{|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

و بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{|x|} = 0$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} = 0$

2. أ-

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x\cos(x) + 1} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2\left(1 - 2\frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = +\infty\end{aligned}$$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$

ب-

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x\cos(x) + 1}}{x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1 - 2\frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1 - 2\frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} = 1\end{aligned}$$

## تصحيح التمرين 2

1. لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 5} + mx - 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{4 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{x^2}} + m - \dfrac{1}{x}\right)$

✓ <u>إذاكان $m > -2$ :</u>

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 5} + mx - 1 = +\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+m-\frac{1}{x}\right)=2+m>0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \end{cases}$$

✓ إذا كان $m<-2$ :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+2x-5}+mx-1=-\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+m-\frac{1}{x}\right)=2+m<0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \end{cases}$$

✓ إذا كان $m=-2$ :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+2x-5}-2x-1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4x^2}+2x-5\cancel{-4x^2}}{\sqrt{4x^2+2x-5}+2x}-1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+2\right)}-1=\frac{-1}{2}$$

2. لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-5}+mx-1=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+m-\frac{1}{x}\right)$

✓ إذا كان $m>2$ :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-5}+mx-1=-\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+m-\frac{1}{x}\right)=m-2>0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty \end{cases}$$

✓ إذا كان $m<2$ :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-5}+mx-1=+\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+m-\frac{1}{x}\right)=m-2<0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty \end{cases}$$

✓ إذا كان $m=2$ :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-5}+2x-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{4x^2}+2x-5\cancel{-4x^2}}{\sqrt{4x^2+2x-5}-2x}-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{5}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}-2\right)}-1=\frac{-3}{2}$$

## تصحيح التمرين 3

1. لكل $x$ من $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ لدينا : $\frac{x^k-1}{x-1}=1+x+x^2+........+x^{k-1}$

و منه فإن $\lim_{x\to1}\frac{x^k-1}{x-1}=k$

2. ليكن $x$ عنصرا من $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ :

$$f(x)=\frac{x+x^2+.........+x^n-n}{x-1}=\frac{x-1+x^2-1+........+x^n-1}{x-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k-1}{x-1}$$

بما أن $\lim_{x\to1}\frac{x^k-1}{x-1}=k$ فإن $\lim_{x\to1}f(x)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

## تصحيح التمرين 4

**1. <u>طريقة 1: باستعمال تغيير المتغير :</u>**

نضع $x=\frac{\pi}{4}+h$ لدينا إذن : $(h\to0)\Leftrightarrow\left(x\to\frac{\pi}{4}\right)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}=\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\tan(h)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan(h)}-1}{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\mathrm{h})-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(h)\right)-\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\tan(h)}{(1-\tan(h))\left(\sqrt{2}(\cos(h)-1)-\sqrt{2}\sin(h)\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\dfrac{\tan(h)}{h}}{(1-\tan(h))\left(\sqrt{2}\left(\dfrac{\cos(h)-1}{h^2}\right).h-\sqrt{2}\dfrac{\sin(h)}{h}\right)}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**<u>طريقة 2: باستعمال العدد المشتق :</u>**

الدالتين "tan" و "cos" قابلتين للاشتقاق في $\dfrac{\pi}{4}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan(x)-1}{2\cos(x)-\sqrt{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan(x)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos(x)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\dfrac{\tan(x)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}}{2\left(\dfrac{\cos(x)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right)}$$

$$=\frac{\tan'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{2}{-\sqrt{2}}$$

## تصحيح التمرين 5

1. لدينا لكل $x$ من $\mathbb{R}^*$ : $|f(x)|=|x|.\left|\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right|$

و بما أن $\left|\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right|\leq 1$ فإن $|f(x)|\leq|x|$

و حيث أن $\lim_{x\to 0}|x|=0$ فإن $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$

و منه فإن الدالة $f$ متصلة في النقطة $0$.

2. ليكن $x_0\in\mathbb{R}^*$

✓ الدالة $f_1:x\mapsto x$ متصلة في $x_0$

✓ لدينا :الدالة $f_2 : x \mapsto \dfrac{2}{x}$ متصلة في $x_0$

و الدالة $f_3 : x \mapsto \sin x$ متصلة في $f_2\left(x_0\right)$

إذن الدالة $f_3 \circ f_2$ متصلة في $x_0$

و منه الدالة $f = f_1 \times \left(f_3 \circ f_2\right)$ متصلة في $x_0$

و بالتالي $f$ متصلة على $\mathbb{R}^*$

و حيث أن الدالة $f$ متصلة في $0$ فإن $f$ متصلة عللى $\mathbb{R}$.

## تصحيح التمرين 6

1) $f\left(x\right) = \dfrac{2x-1}{x^2-6x+5}$

لدينا $D_f = \left]-\infty,1\right[ \cup \left]1,5\right[ \cup \left]5,+\infty\right[$

الدالة $f$ متصلة على حيز تعريفها لأنها دالة جذرية

2) $f\left(x\right) = \dfrac{\left|x\right|-1}{\sqrt{x}-1}$

لدينا $D_f = \left[0,1\right[ \cup \left]1,+\infty\right[$

الدالة $g : x \mapsto \left|x\right|-1$ متصلة على $\mathbb{R}$ و بالحصوص على $D_f$

الدالة $h : x \mapsto \sqrt{x}-1$ متصلة على $\mathbb{R}^+$ و بالخصوص على $D_f$

و $h\left(x\right) \neq 0$ على $D_f$

إذن الدالة $f$ متصلة على $D_f$ كخارج دالتين متصلتين على $D_f$

3) $f\left(x\right) = x^2 + 2\left|x\right|$

لدينا $D_f = \mathbb{R}$

الدالة $g : x \mapsto x^2$ متصلة على $\mathbb{R}$

الدالة $h : x \mapsto 2\left|x\right|$ متصلة على $\mathbb{R}$

إذن بما أن $f = g + h$ فإن $f$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$

4) $f\left(x\right) = E\left(x\right)$

لدينا $D_f = \mathbb{R}$

✓ على المجال $\left[k,k+1\right[$ $\left(k \in \mathbb{Z}\right)$

لدينا : $f\left(x\right) = k$

إذن الدالة $f$ متصلة على المجال $]k, k+1[$ لأنها قصور دالة ثابتة

✓ اتصال $f$ في النقطة $k$ مع $k \in \mathbb{Z}$

على المجال $]k-1, k[$ لدينا : $f(x) = k-1$

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^-} k-1 = k-1$$

و بما أن $f(k) = k$ فإن $f$ غير متصلة على اليسار في $k$

إذن الدالة $f$ متصلة على $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ و كل نقطة من $\mathbb{Z}$ لدينا $f$ متصلة على يمينها و غير متصلة على يسارها

## تصحيح التمرين 7

1) ليكن $x$ عددا حقيقيا لدينا : $x = 1$ أو $x \neq 1 \Leftrightarrow x \in D_f$

و منه فإن $D_f = \mathbb{R}$

2) بما أن $|\sin a| \leq 1$ $(\forall a \in \mathbb{R})$ فإن $\left|\sin \dfrac{1}{x-1}\right| \leq 1$ $\left(\forall x \in ]0;2[ \atop x \neq 1\right)$

و منه فإن $\left|x^2-1\right| \leq \left|f(x)\right| = \left|x^2-1\right|\left|\sin \dfrac{1}{x-1}\right|$ $\left(\forall x \in ]0;2[ \setminus \{1\}\right)$

و لدينا : $\left|x^2-1\right| = |x-1||x+1|$

$$x \in ]0,2[ \Rightarrow |x+1| \leq 3$$

$$x \in ]0,2[ \Rightarrow \left|x^2-1\right| \leq 3|x-1|$$

و منه $|f(x) - f(1)| \leq 3|x-1|$ $\left(\forall x \in ]0,2[\right)$

3) بما أن $|f(x)-f(1)| \leq 3|x-1|$ $\left(\forall x \in ]0,2[\right)$ و $\lim_{x \to 1} |x-1| = 0$

فإن $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ و منه فإن الدالة $f$ متصلة في النقطة $x_0 = 1$

## تصحيح التمرين 8

1) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

لدينا $D_f = \mathbb{R}^*$

لدينا $f = g \circ h$ حيث $g : x \mapsto \cos(x)$ و $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$

لتكن $x_0 \in \mathbb{R}^*$

$h$ دالة متصلة في $x_0$ ( لأنها دالة جذرية و $x_0 \in D_h$ )

$g$ دالة متصلة في $h\left(x_0\right)$ ( لأن $g$ متصلة على $\mathbb{R}$ )

إذن $g \circ h$ متصلة في $x_0$ و منه $f$ متصلة في $x_0$

و بالتالي $f$ متصلة على $D_f$

2) $f(x)=\left|x^3-2x^2+1\right|$

لدينا $D_f=\mathbb{R}$

لدينا $f=g \circ h$ حيث $g: x \mapsto |x|$ و $h: x \mapsto x^3-2x^2+1$

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$

$h$ دالة متصلة في $x_0$ ( لأنها دالة حدودية )

$g$ دالة متصلة في $h\left(x_0\right)$ ( لأن دالة القيمة المطلقة متصلة على $\mathbb{R}$ )

إذن $f$ متصلة في $x_0$ و منه فإن $f$ متصلة على $\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sin\left(x^2+x\right)$

لدينا $D_f=\mathbb{R}$

لدينا $f=g \circ h$ حيث $g: x \mapsto \sin(x)$ و $h: x \mapsto x^2+x$

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$

$h$ دالة متصلة في $x_0$ ( لأنها دالة حدودية )

$g$ دالة متصلة في $h\left(x_0\right)$ ( لأن "sin" متصلة على $\mathbb{R}$ )

إذن $f$ متصلة في $x_0$ و منه فإن $f$ متصلة على $\mathbb{R}$

4) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

لدينا $D_f=\mathbb{R}$

لدينا $f=g \circ h$ حيث $g: x \mapsto \sqrt{x}$ و $h: x \mapsto 1+x^2$

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$

$h$ دالة متصلة في $x_0$ ( لأنها دالة حدودية )

$g$ دالة متصلة في $h\left(x_0\right)$ ( لأن $g$ دالة متصلة على $\mathbb{R}^+$ و $h\left(x_0\right)>0$ )

إذن $f$ متصلة في $x_0$ و منه فإن $f$ متصلة على $\mathbb{R}$

## تصحيح التمرين 9

(1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 3x^3+x-1=\lim_{x\to+\infty} 3x^3=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 3x^3+x-1=\lim_{x\to-\infty} 3x^3=-\infty$$

(2 $$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{x-5}{x+3}=-1$$

(3

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} 3x=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} 3x=-\infty$$

(4

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}-x=\frac{1-x}{x+1}$$
$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

(5

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{|x+1|x}{x^2-1}=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{(x+1)x}{(x+1)(x-1)}=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{|x+1|x}{x^2-1}=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{-(x+1)x}{(x+1)(x-1)}=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{-x}{x-1}=\frac{-1}{2}$$

(6 $$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}=(x+1).\frac{1}{x^2}$$
$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}(x+1).\frac{1}{x^2}=+\infty$$

(7 $$f(x)=\frac{x^3-1}{(x-1)^2(3x-1)}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2(3x-1)}=\frac{x^2+x+1}{(x-1)(3x-1)}$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+x+1}{3x-1}\times\frac{1}{x-1}=\frac{3}{2}\times+\infty=+\infty$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+x+1}{3x-1}\times\frac{1}{x-1}=\frac{3}{2}\times-\infty=-\infty$$

بما أن $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$ فإن $f$ لا تقبل نهاية بجوار 1

(8
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

## تصحيح التمرين 10

(1

✓ على المجال $[-1,0[$ : $E(x)=-1$ إذن $f(x)=\frac{-1}{x}$

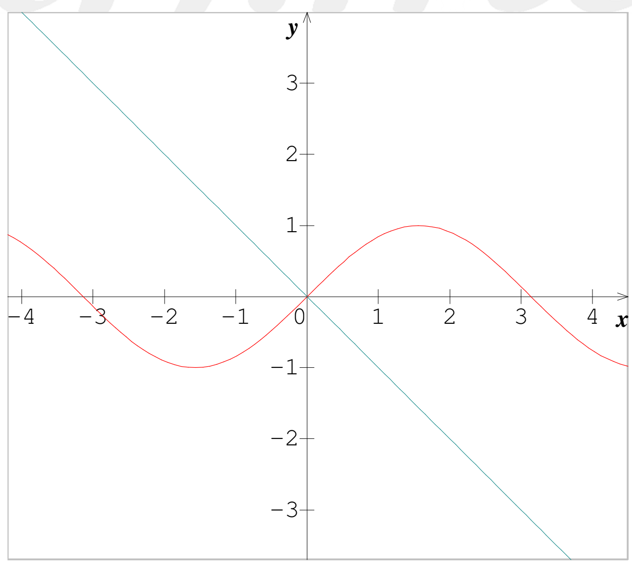
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-1}{x} = +\infty$$

✓ على المجال $[0,1[$ : $E(x)=0$ إذن $f(x)=\frac{0}{x}=0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 0 = 0$$

إذن $f$ لا تقبل نهاية بجوار 0

(2




لدينا : $x=0 \Leftrightarrow \sin x = -x$

إذن $D_f = \mathbb{R}^*$

$$f(x)=\frac{x\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}=\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}$$

نعلم أن $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ إذن $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

3) $f(x)=\frac{\tan(3x)}{\sin(2x)}$

$$D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{k\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}\right\}$$

على المجال $\left]-\frac{\pi}{6},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{6}\right[$ : $f(x)=\frac{3}{2}\times\frac{\tan 3x}{3x}\times\frac{2x}{\sin 2x}$

لدينا : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{3x}=\lim\limits_{X\to0}\frac{\tan X}{X}=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sin 2x}=\lim\limits_{X\to0}\frac{X}{\sin X}=1$

إذن : $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\frac{3}{2}$

4) $f(x)=\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$D_f=\mathbb{R}^*-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$f(x)=\frac{\tan x-\cos x\tan x}{x^3}=\frac{\tan x}{x}\times\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

## تصحيح التمرين 11

1) نعلم أن $-1\leq\sin x\leq1$ إذن $-1\leq-\sin x\leq1$

إذن $x-1\leq x-\sin x\leq x+1$

إذن $x-1\leq f(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) ليكن $x\in\mathbb{R}$

✓ لدينا $E(x)\leq x<E(x)+1$

إذن $x-1<E(x)$

إذن $x-1<f(x)$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

✓ لدينا $E(x)\le x$ أي $f(x)\le x$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

## تصحيح التمرين 12

1) لدينا : $f(x)=2x^3+5x-4$

لدينا : $D_f=\mathbb{R}$ و $f$ متصلة على $\mathbb{R}$ ( لأنها دالة حدودية )

نعتبر المجال $[-1,1]$

لدينا : $f(-1)=-11$ و $f(1)=3$ إذن $f(-1)\le 0\le f(1)$

و بما أن $f$ متصلة على المجال $[-1,1]$ فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد على الأقل $c\in[-1,1]$ بحيث $f(c)=0$

نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{R}$

2) لدينا $f(x)=1+\sin x-x$

لدينا : $D_f=\mathbb{R}$ و $f$ متصلة على $\mathbb{R}$

لدينا : $f(0)=1$ و $f(\pi)=1-\pi$ إذن $f(\pi)<0<f(0)$

و بما أن $f$ متصلة على المجال $[0,\pi]$ فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد على الأقل $c\in[0,\pi]$ بحيث $f(c)=0$

إذن نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{R}$

3) لدينا $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{2}\cos x$

لدينا : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ و $f$ متصلة على $D_f$

نعتبر المجال $[0,2\pi]$

لدينا : $f(0)=\dfrac{1}{2}$ و $f(2\pi)=\dfrac{1}{(2\pi+1)^2}-\dfrac{1}{2}$ إذن $f(2\pi)<0<f(0)$

و بما أن $f$ متصلة على المجال $[0,2\pi]$ فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد على الأقل $c\in[0,2\pi]$ بحيث $f(c)=0$

إذن نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{R}$

## تصحيح التمرين 13

لدينا : $f\left(x\right)=x^4-\dfrac{4}{x}$

لدينا : $D_f=\mathbb{R}^*$ و $f$ متصلة على $\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} f\left(x\right)=x &\Leftrightarrow \quad x^4-\frac{4}{x}=x \\ &\Leftrightarrow \quad x^4-\frac{4}{x}-x=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^5-x^2-4=0 \end{aligned}$$

نعتبر $g:x\mapsto x^5-x^2-4$

لدينا : $g\left(1\right)=-4$ و $g\left(2\right)=24$ إذن $g\left(1\right)\leq 0\leq g\left(2\right)$

و بما أن $g$ متصلة على المجال $\left[1,2\right]$ فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد على الأقل $c\in\left[1,2\right]$ بحيث $g\left(c\right)=0$

لدينا :

$$\begin{aligned} g\left(c\right)=0 &\Leftrightarrow \quad c^5-c^2-4=0 \\ &\Leftrightarrow \quad c^4-\frac{4}{c}=c \\ &\Leftrightarrow \quad f\left(c\right)=c \end{aligned}$$

إذن يوجد على الأقل $c\in\left[1,2\right]$ بحيث $f\left(c\right)=c$

إذن المعادلة $f\left(x\right)=x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left[1,2\right]$

## تصحيح التمرين 14

نعتبر دالة $f$ متصلة على مجال $I$

نفترض أن $\left[\left(\exists x\in I\right)\quad f\left(x\right)\leq 0\right]$ و $\left[\left(\exists x\in I\right)\quad f\left(x\right)\geq 0\right]$ و $\left[\left(\forall x\in I\right)\quad f\left(x\right)\neq 0\right]$

بما أن $f$ لا تنعدم على $I$ فإن $\left[\left(\exists x\in I\right)\quad f\left(x\right)<0\right]$ و $\left[\left(\exists x\in I\right)\quad f\left(x\right)>0\right]$

إذن يوجد $x_1$ و $x_2$ من $I$ بحيث : $f\left(x_2\right)<0$ و $f\left(x_1\right)>0$

من الواضح أن $x_1\neq x_2$ و هكذا $f\left(x_2\right)<0<f\left(x_1\right)$

بما أن $x_1$ و $x_2$ من $I$ فإن : المجال الذي طرفاه $x_1$ و $x_2$ ضمن $I$

لدينا $f$ متصلة على $I$ إذن $f$ متصلة على المجال الذي طرفاه $x_1$ و $x_2$

و منه يوجد $c$ ينتمي إلى هذا المجال بحيث $f\left(c\right)=0$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال الذي طرفاه $x_1$ و $x_2$

إذن $f$ تنعدم على $I$ و هذا مخالف للمعطيات

إذن إذا كانت $f$ لا تنعدم في $I$ فإن لدينا : $\left[(\forall x \in I) \quad f(x)>0\right]$ أو $\left[(\forall x \in I) \quad f(x)<0\right]$

## تصحيح التمرين 15

ليكن $n$ عنصرا من $\mathbb{N}^*$

نعتبر الدالة العددية $g$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بما يلي : $g(x)=f(x)-x^n$

الدالة $g$ متصلة على المجال $[0,1]$ كمجموع دالتين متصلتين على $[0,1]$

و لدينا $g(0)=f(0)\geq 0$ و $g(1)=f(1)-1\leq 0$

إذن $g(0)\times g(1)\leq 0$ و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد $\alpha_n$ من $[0,1]$ بحيث : $g(\alpha_n)=0$ أي $f(\alpha_n)=\alpha_n^n$

## تصحيح التمرين 16

نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $[a,b]$ بما يلي : $g(x)=f(x)-x$

- ✓ الدالة $g$ متصلة على $[a,b]$ ( كمجموع دالتين متصلتين على $[a,b]$ )
- ✓ بما أن $f$ دالة معرفة من $[a;b]$ نحو $[a;b]$ فإن $f(a)\in[a;b]$ و $f(b)\in[a;b]$

و منه $a\leq f(a)$ و $f(b)\leq b$ أي $f(a)-a\geq 0$ و $f(b)-b\leq 0$ إذن $g(a)\geq 0$ و $g(b)\leq 0$

و بالتالي : $g(a)\times g(b)\leq 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a;b]$

و بالتالي : المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a;b]$ .

つづく