~ *Examens historiques* ~
Baccalauréat sciences expérimentales
juin 1979

Exercice 1 :

On considère l'équation : $z \in \mathbb{C}, \quad 2z^2 + bz + 2 = 0$
où b désigne un nombre complexe.

1. Calculer le nombre complexe b pour que $1+i$ soit solution de cette équation .Trouver l'autre solution.
2. On désigne par z' et z'' les solutions de cette équation .En utilisant la formule de Moivre, calculer : $z'^4 + z''^4$

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x} - 1 + \ln x$

1. Etudier les variations de f .
2. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé .
   a) Etudier les branches infinies de (C).
   b) Donner l'équation de la tangente à (C) en son point d'abscisse 1 .
   c) Tracer (C). On admettra que la courbe (C) coupe la droite (D) d'équation $y = 2x$ en un
   point d'abscisse comprise entre 3 et 4 .
3. Soit F la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$$F(x) = x^2 - 2x + (x-1)\ln x$$
   a) Calculer $F'(x)$.
   b) En déduire le calcul de l'aire du domaine plan limité par : la courbe (C) ,l'axe des abscisses ,
   la droite (D) d'équation $y = 2x$ et la droite d'équation $x = 2$.

Exercice 3 :

Un sac contient 7 jetons tels que :

3 sont noirs et portent les chiffres $1;2;2$

4 sont rouges et portent les chiffres $1;1;1;2$

On tire 3 jetons du sac simultanément ; on suppose que les jetons ont la même probabilité d'être tirés

1. Calculer la probabilité pour que parmi les 3 jetons tirés , deux et deux jetons seulement soient rouges.
2. Soit X la variable aléatoire qui , à chaque tirage , associe la somme des chiffres portés par les trois jetons tirés .
   Déterminer les valeurs prises par X et la loi de probabilité de X .

Correction d'exercice 1 :

$$z \in \mathbb{C}, \quad 2z^2 + bz + 2 = 0 \quad (1)$$

1. $1+i$ est solution de (1) donc :

$$2(1+i)^2 + b(1+i) + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(2i) + b(1+i) + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{-2-4i}{1+i}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{b = -3-i}$$

$z' = 1+i$ est solution de (1)

Soit z'' l'autre solution .

On a $z'.z'' = \frac{2}{2} = 1$ d'où $z'' = \frac{1}{z'} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$ donc $z'' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

2. $z' = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

$$z'^4 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^4 = \sqrt{2}^4\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = -4$$

$$z'' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$z''^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)\right)^4 = \frac{\sqrt{2}^4}{2^4}\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right) = \frac{-1}{4}$$

Donc $z'^4 + z''^4 = \frac{-17}{4}$

Correction d'exercice 2 :

$$f(x) = 2x - \frac{1}{x} - 1 + \ln x$$

1. Ensemble de définition de f : $D_f =]0,+\infty[$

Limites aux bornes de D_f : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$f'(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x^2}$;

Tableau de variation de f :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

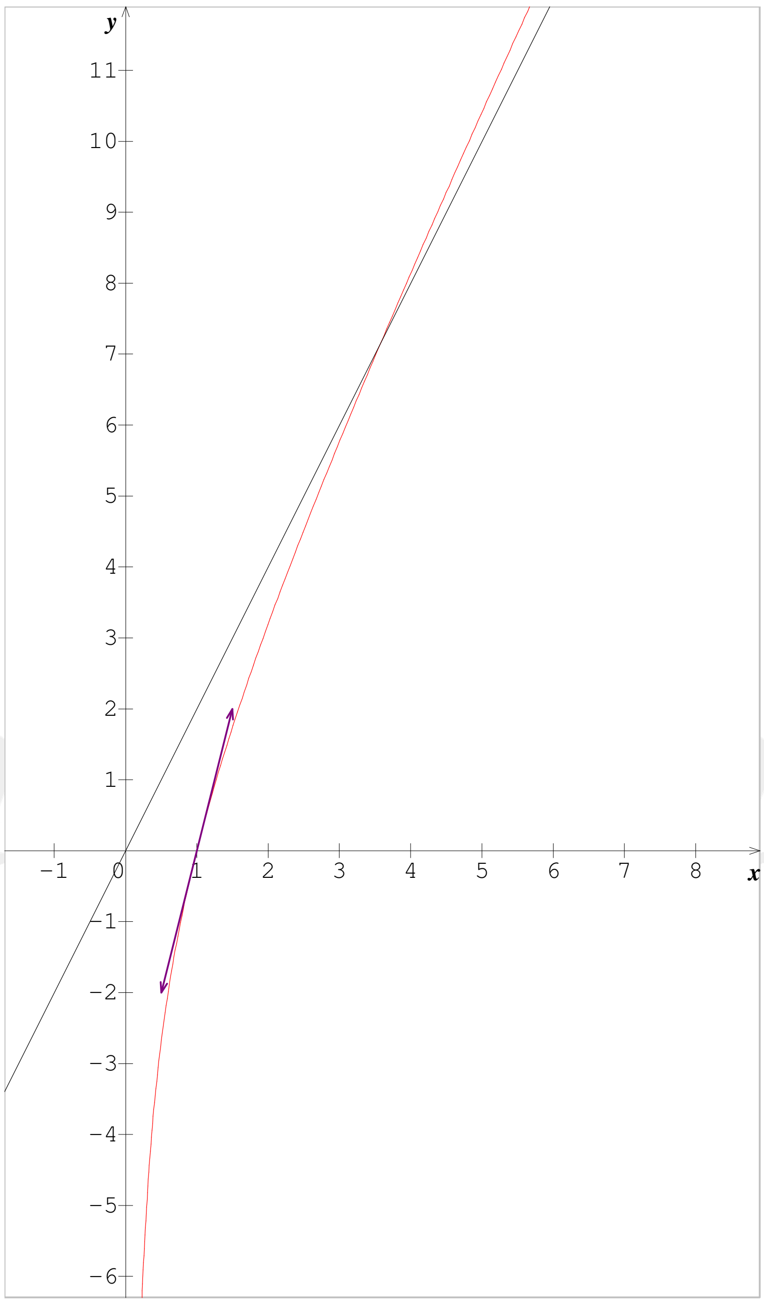
2. a) <u>Branches infinies</u> :

- La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C)
- $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} - 1 + \ln x = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La courbe (C) admet une branche de direction la droite d'équation $y = 2x$

b) Equation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 : $y = 4x - 4$

c) Représentation graphique :



3. $F(x)=x^{2}-2x+(x-1)\ln x$

a)

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x-2+\ln x+\frac{x-1}{x} \\ &= 2x-2+\ln x+1-\frac{1}{x} \\ &= 2x-\frac{1}{x}-1+\ln x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 2x\,dx+\int_1^2 \left(2x-f(x)\right)dx \\ &= \left[x^2\right]_0^1+\left[x^2-F(x)\right]_1^2 \\ &= 1+\left(4-\ln 2-2\right) \\ &= 3-\ln 2 \end{aligned}$$

Correction d'exercice 3 :

1. A : parmi les trois jetons , 2 et 2 jetons seulement sont rouges :

$$p(A)=\frac{C_4^2\times C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$$

2. $X(\Omega)=\{3,4,5,6\}$

<u>Loi de probabilité de X</u> :

k	3	4	5	6
$p(X=k)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

つづく