~ *Examens historiques* ~
Baccalauréat sciences expérimentales
mai 1979

Exercice :

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = (\bar{z} - i)(\bar{z} + iz)$$

$\bar{z}$ désignant le conjugué de z

1. On pose $u = f(1 - i)$. Trouver la forme algébrique et la forme trigonométrique de u.

En déduire les formes trigonométriques des racines cubiques de u.

2. On pose $z = x + iy$, x et y réels , et l'on désigne par M l'image de z dans le plan complexe .
   a) Déterminer et tracer l'ensemble des points M tels que $f(z) = 0$
   b) Déterminer et tracer l'ensemble des points M pour que $f(z)$ soit un nombre réel.

Problème :

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1 - \ln(x)} & pour, x \neq 0 \\ f(0) = -1 & \end{cases}$$

1.
   a) Déterminer D_f ,ensemble de définition de f
   b) Etudier la continuité de f à droite au point $x_0 = 0$
   c) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$; f est-elle dérivable à droite au point $x_0 = 0$
2. Etudier les variations de la fonction f
3. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité $2cm$)
   a) Montrer que (C) admet un point d'inflexion I dont on calculera les coordonnées ; Donner l'équation de de la tangente à (C) au point I .
   b) Préciser la demi-tangente à (C) en son point d'abscisse 0.
   c) Etudier les branches infinies de (C).

d) Tracer la courbe (C).

4. Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{1}{1-\ln(x)} & pour, x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que $D_h = D_f$ et que pour tout x appartient à D $(D = D_h = D_f)$:

$$h(x) = f(x) + 1$$

En déduire le tableau de variation de h. Tracer la courbe (H) représentant les variations de h, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Calculer , en cm^2, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limité par les courbes (C) et (H), l'axe des ordonnées , et la droite d'équation $x = \lambda$ $(0 \leq \lambda < e)$.

Calculer $\lim\limits_{\substack{\lambda \to e \\ \lambda < e}} \mathcal{A}(\lambda)$

Correction de l'exercice :

$$f(z)=(\overline{z}-i)(\overline{z}+iz)$$

1. $u=f(1-i)=2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Soit $z=\rho\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)$

$$z^3=u \quad \Leftrightarrow \rho^3\left(\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho=\sqrt{2} \\ \theta=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \quad k\in\mathbb{Z}, 0\le k\le 2 \end{cases}$$

$z_0=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right); z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right); z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$

2. Soit $z=x+iy$ et $M(z)$; $M(x,y)$

a)

$$\begin{aligned} f(z) &=(x-iy-1)(x-iy+ix-y) \\ &=(x-iy-1)\left[(x-y)+i(x-y)\right] \\ &=(x-iy-1)(x-y)(1+i) \\ &=(x-y)\left[x+y+1+i(x-y-1)\right] \end{aligned}$$

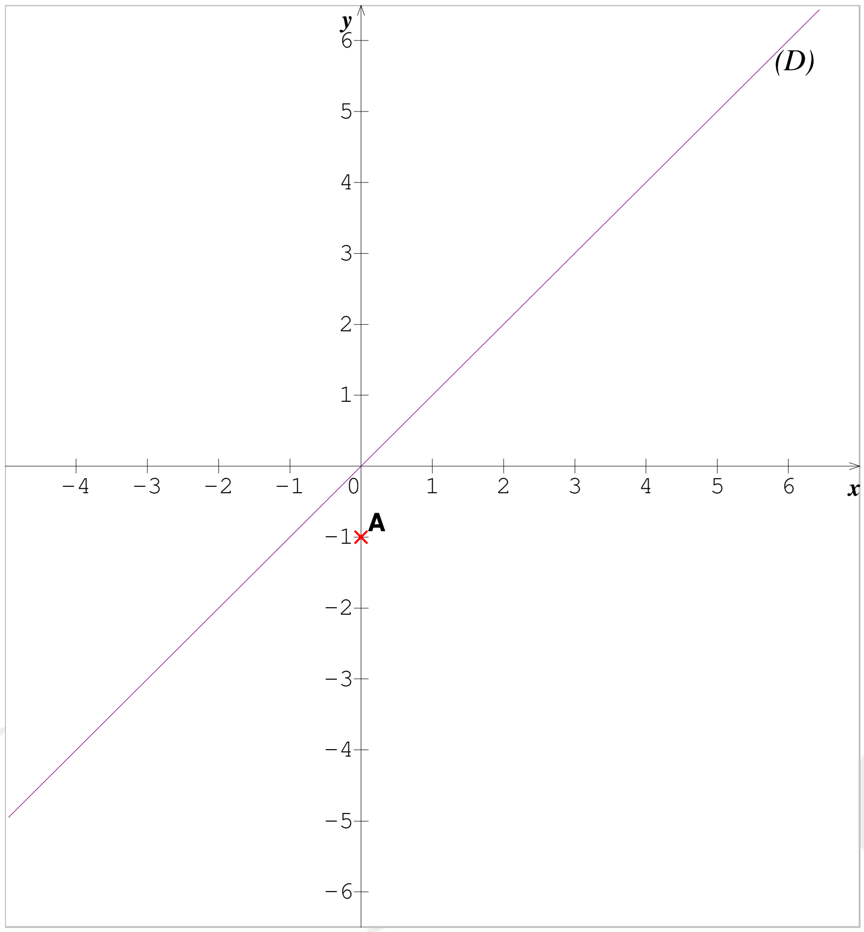
$$f(z)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x-y=0 \quad ou \quad \begin{cases} x+y+1=0 \\ et \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad y=x \quad ou \quad \begin{cases} x+y=1 \\ et \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad ou \quad \begin{cases} x=0 \\ et \\ y=-1 \end{cases}$$

L'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $f(z)=0$ est la réunion de la droite (D) d'équation $y=x$

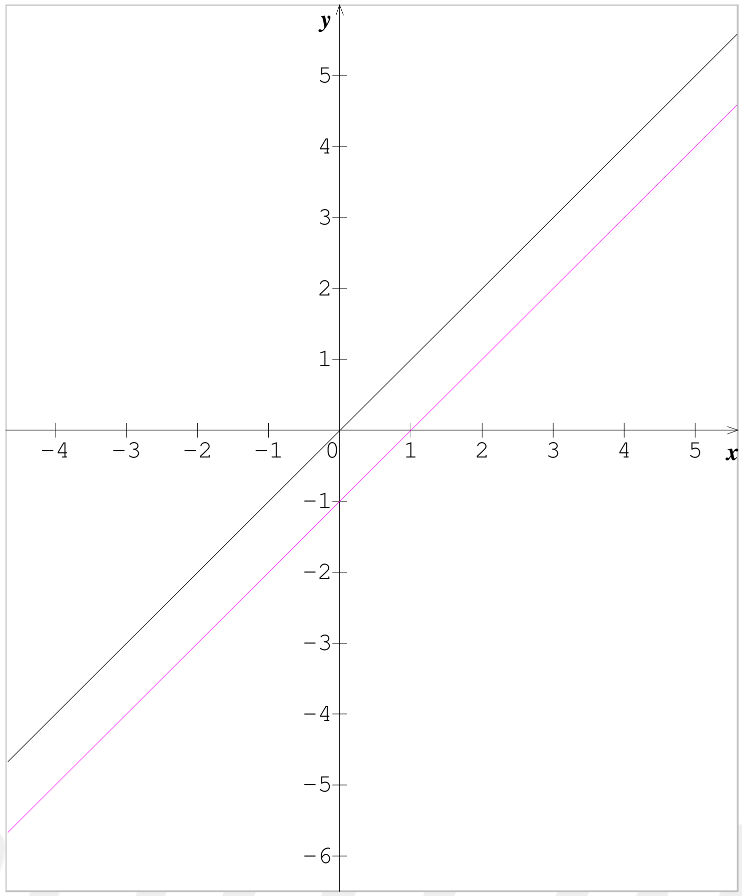
et du point $A(0,-1)$



b)

$$\begin{aligned} f(z)\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow (x-y)(x-y-1)=0 \\ &\Leftrightarrow y=x \quad ou \quad y=x-1 \end{aligned}$$

L'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $f(z)$ est réel est la réunion de deux droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives : $y=x$ et $y=x-1$


y
5
4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
x
−1
−2
−3
−4
−5
−6

Correction du problème :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1-\ln(x)} & pour, x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

1. a) Ensemble de définition de f : $D_f = [0, e[\cup]e, +\infty[$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1-\ln x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln x\left(\dfrac{1}{\ln x}-1\right)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\dfrac{1}{\ln x}-1} \\ &= -1 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

Donc f est continue à droite de 0

2. $f'(x) = \dfrac{1}{x(1-\ln x)^2}$

Tableau de variation de f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow -1$

3. a) $f''(x) = \dfrac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$; $I\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{-1}{2}\right)$ est un point d'inflexion .

b)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\ln x}{1 - \ln x} + 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x - x \ln x}$$

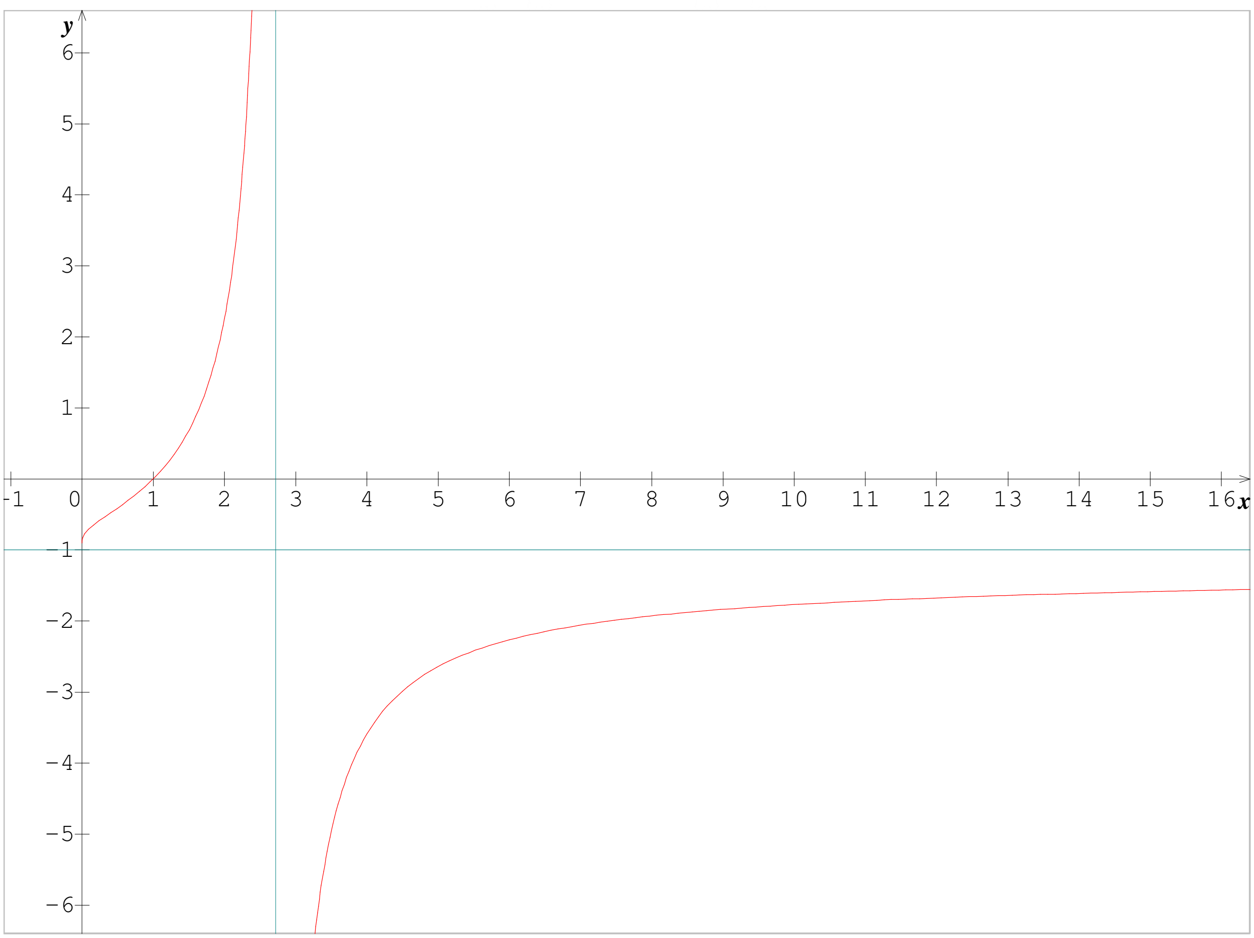
$$= +\infty$$

Donc (C) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0.

c) <u>Branches infinies</u> :

Les droites d'équations $x = e$ et $y = -1$ sont asymptotes à (C).

d) <u>Représentation graphique</u> :



4.

$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{1}{1-\ln(x)} & pour, x\neq 0 \\ h(0)=0 \end{cases}$$

a) $D_h=[0,e[\cup]e,+\infty[=D_f$

Si $x\neq 0$; $f(x)+1=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}+1=\dfrac{1}{1-\ln x}=h(x)$

et $f(0)+1=0=h(0)$

Donc : $\forall x\in D_h;\quad h(x)=f(x)+1$

- $h'(x)=f'(x)$
- Tableau de variation de h :

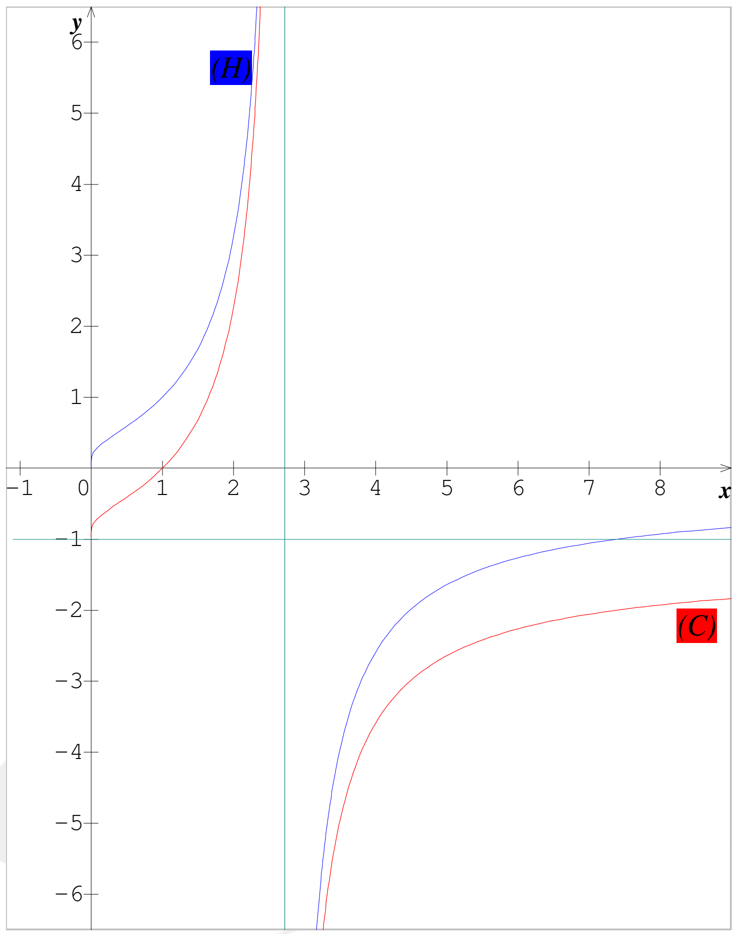
x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\|$	$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0

- <u>Branches infinies</u> :

Les droites d'équations $x=e$ et $y=0$ sont asymptotes à (H).

- $h(x)-f(x)=1>0$ donc (H) est au-dessus de (C)

- Représentation graphique :



b) $\mathcal{A}(\lambda)=\int_0^{\lambda}\left(h(x)-f(x)\right)dx\,.4cm^2=\left[x\right]_0^{\lambda}.4cm^2=4\lambda cm^2$ et $\lim\limits_{\lambda\to e^-}\mathcal{A}(\lambda)=4e\,cm^2$.

つづく