~ Examen Vintage ~
Baccalauréat sciences expérimentales
Septembre 1975

Problème 1 :

1. Soit la fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = 2x^2 + 1 - \ln(|x|)$

a) Etudier les variations de cette fonction φ (sa représentation graphique n'est pas exigée).

b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(x) > 0$

2. On se propose d'étudier la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que : $f(x) = 2x + \dfrac{\ln(|x|)}{x}$

a) En utilisant la première question, démontrer que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

b) Achever l'étude de cette fonction.

c) Tracer la représentation graphique (C) de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$,(On précisera en particulier les asymptotes à la courbe (C) et la position de celle-ci par rapport à ces droites).

3. a) soit ψ la fonction de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ telle que : $\psi(x) = 2x + \dfrac{\ln x}{x}$

Démontrer que ψ est une bijection.

b) Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, (C') représentation graphique de ψ^{-1}, bijection réciproque de ψ.

c) calculer $\psi^{-1}(2)$ puis $(\psi^{-1})'(2)$ (sans chercher à exprimer ψ^{-1})

4. a) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre (C), la droite d'équation $y = 2x$, les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$ $(\alpha > 1)$

b) En déduire l'aire $\mathcal{A}'$ du domaine compris entre (C'), la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$, les droites d'équations $y = 1$ et $y = \alpha$ $(\alpha > 1)$

c) Calculer l'aire $\mathcal{A}''$ du domaine compris entre (C'), la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$, les droites d'équations $x = 2$ et $x = f(\alpha)$.

Problème 2 :

Exercice 1 :

On considère la suite numérique (a) de terme général a_n, et la suite numérique (A) de terme

Général A_n. On définit :

$(a): \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^{*+}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n = 2\ln(a_n)$

$(A): \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^{*+}$ $\quad a_1 = 2$

1. Déterminer la suite (a) pour que la suite (A) soit une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$. Quelle est la nature de la suite (a).

2. a) Déterminer la suite (a) pour que la suite (A) soit une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

   b) Calculer $S_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$. Cette somme a-t-elle une limite lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 2 :

Une urne contient 10 boules blanches et 6 boules noires.

On tire une boule, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne. (Chaque tirage n'a donc aucune influence sur le suivant).

Le tirage d'une boule noire rapporte 10 points , celui d'une boule blanche 5 points .

On effectue 5 tirages successifs

On choisit pour variable aléatoire X le total des points à l'issue des 5 tirages.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
2. Pour chaque valeur de X ; déterminer la probabilité d'obtenir cette valeur . Quels sont les gains les plus probables
3. Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X .
4. Déterminer l'espérance mathématique de X , sa variance , son écart-type .

Correction : Problème 1

$\varphi(x) = 2x^2 + 1 - \ln(|x|)$

1.

- Ensemble de définition de φ : $D_\varphi =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$
- Limites aux bornes de D_φ :
  - ✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 + 1 - \ln(-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(2x + \frac{1}{x} + \frac{\ln(-x)}{-x}\right) = +\infty$
  - ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 + 1 - \ln(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2x + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$
  - ✓ $\lim\limits_{x\to0^-} \varphi(x) = +\infty$
  - ✓ $\lim\limits_{x\to0^+} \varphi(x) = +\infty$
- $\varphi'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$

  Tableau de variation de φ :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\phi'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
$\phi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}+ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}+ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

- D'après le tableau de variation de φ , on constate : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(x) > 0$

2. $f(x) = 2x + \frac{\ln(|x|)}{x}$

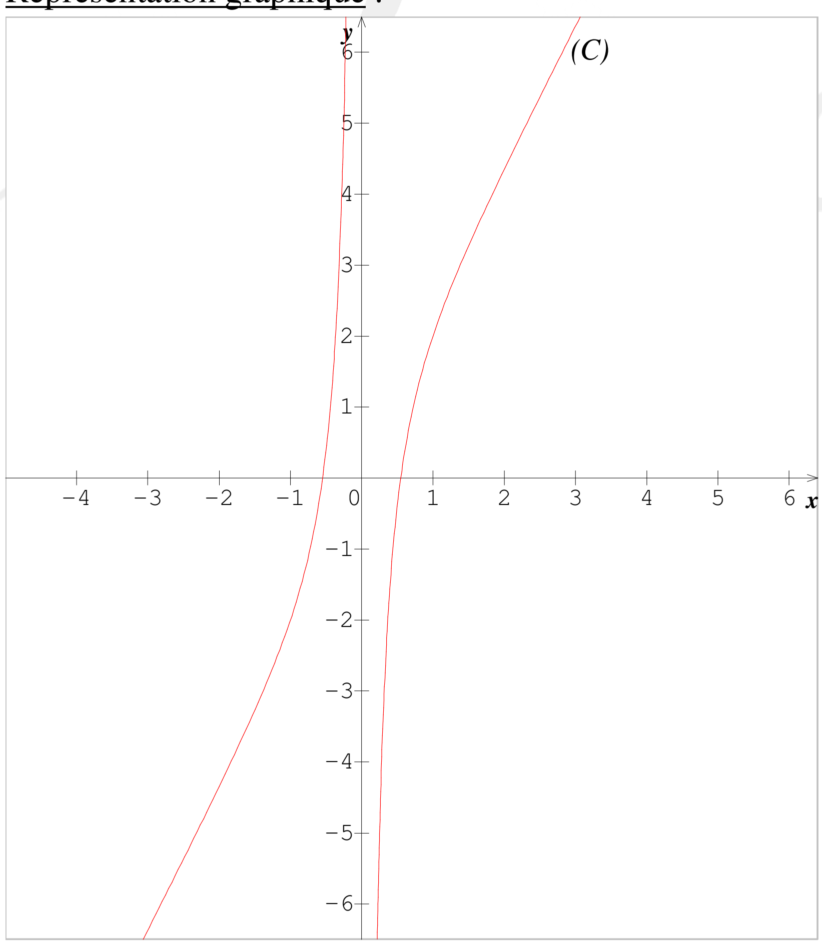
a)

- Ensemble de définition de f : $D_f = \mathbb{R}^*$
- f est impaire
- $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2} > 0$; tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

Branches infinies

- La droite d'équation $x=0$ est asymptote à (C)
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=0$ donc la droite d'équation $y=2x$ est asymptote à (C)
- Sur $]0,+\infty[$; $f(x)-2x=\dfrac{\ln x}{x}$;
  - ✓ Si $x>1$ alors (C) est au dessus de son asymptote $\left((D): y=2x\right)$
  - ✓ Si $x=1$ alors (C) coupe (D)
  - ✓ Si $0<x<1$ alors (C) est au dessous de (D).
    - Représentation graphique :



3. a) ψ est définie , continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $\psi(]0,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$

Donc ψ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

ψ^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$

ψ^{-1} est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) Représentation graphique de ψ^{-1} :

c) $\psi^{-1}(2)=1$; $\left(\psi^{-1}\right)'(2)=\dfrac{1}{\psi'\left(\psi^{-1}(2)\right)}=\dfrac{1}{\psi'(1)}=\dfrac{1}{3}$

Correction : problème 2

Exercice 1 :

1. (A) suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$; donc on a $A_{n+1}=A_n+\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} A_{n+1}=A_n+\frac{1}{2} &\Leftrightarrow 2\ln(a_{n+1})=2\ln(a_n)+\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2\left(\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)\right)=\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=e^{\frac{1}{4}} \\ &\Leftrightarrow a_{n+1}=e^{\frac{1}{4}}.a_n \end{aligned}$$

(a) est une suite géométrique de raison $e^{\frac{1}{4}}$

2. (A) une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$; donc on a $A_{n+1}=\frac{1}{2}.A_n$

a)

$$\begin{aligned} A_{n+1}=\frac{1}{2}.A_n &\Leftrightarrow 2\ln(a_{n+1})=\ln(a_n) \\ &\Leftrightarrow \ln(a_{n+1}^2)-\ln(a_n)=0 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{a_{n+1}^2}{a_n}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}^2}{a_n}=1 \\ &\Leftrightarrow a_{n+1}^2=a_n \\ &\Leftrightarrow a_{n+1}=\sqrt{a_n} \end{aligned}$$

car tous les termes de (a) sont positifs

Donc $(a):\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=\sqrt{a_n} \quad ;\forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

b) $$S_n = A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n$$

or $\left(A\right)$ suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

d'où : $$S_n = 2\ln\left(2\right).\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 4\ln\left(2\right).\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 4\ln\left(2\right)$

<u>Exercice 2 :</u>

1. $X\left(\Omega\right) = \left\{25, 30, 35, 40, 45, 50\right\}$

2.

k	25	30	35	40	45	50
$p\left(X = k\right)$	$C_5^0\left(\frac{3}{8}\right)^5$	$C_5^1\left(\frac{3}{8}\right)^4\left(\frac{5}{8}\right)$	$C_5^2\left(\frac{3}{8}\right)^3\left(\frac{5}{8}\right)^2$	$C_5^3\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{5}{8}\right)^3$	$C_5^4\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^4$	$C_5^5\left(\frac{5}{8}\right)^5$

つづく