Modèles d'épreuves QCM avec leurs solutions pour les concours des grandes écoles au Maroc

Exercice 1 :

$\boxed{Q1}$: La somme

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{12} C_{12}^{k}\right) - 34 =$$

A) 2012	B) 2013	C) 2014	D) 2015

$\boxed{Q2}$: La valeur de la somme

$$S = \sum_{k=1}^{35} k^2$$

est :

A) 14512	B) 14510	C) 14910	D) 14215

$\boxed{Q3}$: La valeur de la somme

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)}$$

est :

A) $\frac{12}{11}$	B) $\frac{11}{10}$	C) $\frac{11}{12}$	D) $\frac{10}{11}$

$\boxed{Q4}$:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k} =$$

A) 0	B) 1	C) 2	D) k

$\boxed{Q5}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{10x} - e^{7x}}{x} =$$

A) 1	B) 2	C) 3	D) 4

$\boxed{Q6}$:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\left(10 - 3e^x\right)^2} dx =$$

A) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10-3e}-\frac{1}{7}\right)$	B) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10-3e}+\frac{1}{7}\right)$	C) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10-e}-\frac{1}{7}\right)$	D) $\frac{1}{10-3e}$

$\boxed{Q7}$:

$$\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx =$$

A) $\frac{-5}{e}$	B) $2+\frac{5}{e}$	C) $\frac{5}{e}$	D) $2-\frac{5}{e}$

$\boxed{Q8}$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}dx =$$

A) $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$	B) $\frac{4}{3}$	C) $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$	D) $\frac{5}{3}$

$\boxed{Q9}$: Soit le réel

$$\lambda=\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$$

En calculant λ^3 , montrer que :

A) $\lambda=0$	B) $\lambda=1$	C) $\lambda=2$	D) $\lambda=3$

Exercice 2 :

Calculer les intégrales suivantes :

$\boxed{Q1}$: $\int_0^\pi e^t\cos(2t)dt =$

A) $\frac{e^\pi}{5}$	B) $\frac{e^\pi+1}{5}$	C) $\frac{e^\pi-2}{5}$	D) $\frac{e^\pi-1}{5}$

$\boxed{Q2}$: $\int_0^\pi e^t\cos^2(t)dt =$

A) $\frac{e^\pi-1}{5}$	B) $\frac{4(e^\pi+1)}{5}$	C) $\frac{3(e^\pi-1)}{5}$	D) $\frac{e^\pi+2}{5}$

Exercice 3 :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et telle que : $\forall x \in [a,b] \quad f(a+b-x)=f(x)$

$\boxed{Q1}$: L' intégrale

$$\int_a^b tf(t)dt =$$

A) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt$	B) $\frac{a-b}{2}\int_a^b f(t)dt$	C) $\frac{a}{2}\int_a^b f(t)dt$	D) $\frac{b}{2}\int_a^b f(t)dt$

$\boxed{Q2}$: L' intégrale

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}dt =$$

A) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$	B) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	C) $\frac{\pi}{3}$	D) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

$\boxed{Q3}$: L' intégrale

$$\int_0^\pi \frac{t\sin t}{3+\cos^2 t}dt =$$

A) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$	B) $\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$	C) $\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$	D) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}$

Exercice 4 :

On considère plusieurs urnes de boules U_1, U_2, ………,U_n,……… telles que : la première urne U_1, contient trois boules jaunes et deux boules vertes et chacune des autres urnes contient deux boules jaunes et deux boules vertes .
On réalise des tirage successifs de la manière suivante :

- On tire au hasard une boule de U_1 ;
- On place la boule tirée de U_1 dans U_2, puis on tire une boule de U_2 ;
- On place la boule tirée de U_2 dans U_3, puis on tire une boule de U_3 ;
- ……..etc.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note E_n l'événement "la boule tirée de U_n est verte " et $p_n = p(E_n)$ sa probabilité.

$\boxed{Q1}$: La valeur de p_1 est

A) $0,54$	B) $0,40$	C) $0,44$	D) $0,64$

$\boxed{Q2}$: Sachant qu'on a tiré une boule verte de U_1 et qu'on l'a placée dans U_2, la probabilité de tirer une boule verte de U_2 est

A) $0,6$	B) $0,83$	C) $0,80$	D) $0,33$

$\boxed{Q3}$: La valeur de p_2 est

A) $0,44$	B) $0,46$	C) $0,48$	D) $0,45$

$\boxed{Q4}$: La relation entre p_n et p_{n+1} est

A) $p_{n+1}=5+5p_n$	B) $p_{n+1}=2+5p_n$	C) $p_{n+1}=5+2p_n$	D) $5p_{n+1}=2+p_n$

$\boxed{Q5}$: En étudiant le comportement de la suite (p_n), peut- on confirmer qu'après un grand nombre de tirages on a

A) Une chance sur deux de tirer une boule verte	B) Une chance sur trois de tirer une boule verte	C) Une chance sur quatre de tirer une boule verte	D) Une chance sur cinq de tirer une boule verte

Exercice 5 :

Le plan complexe P est rapporté au repère direct $(O,\vec{u},\vec{v})$; unité graphique $1cm$

Soient A , B et C les points d'affixes respectives $a=2$, $b=3+i\sqrt{3}$ et $c=2i\sqrt{3}$

$\boxed{Q1}$ **:** La mesure de l'angle $A\widehat{B}C$ vaut

A) $90°$	B) $95°$	C) $85°$	D) $180°$

$\boxed{Q2}$: L'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est

A) $1-i\sqrt{3}$	B) $1+i\sqrt{3}$	C) $-1+i\sqrt{3}$	D) $-1-i\sqrt{3}$

$\boxed{Q3}$: On note A_n le point d'affixe z_n, où (z_n) est la suite de nombres complexes , de premier terme $z_0=0$, et telle que , pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2$$

On considère la suite (t_n) définie par : $t_n=z_n-\omega$

En remarquant que ω est solution de l'équation $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z+2$. t_n vérifie la relation :

A) $t_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}t_n$	B) $t_{n+1}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}t_n$	C) $1+i\sqrt{3}t_{n+1}=2t_n$	D) $1+i\sqrt{3}t_n=2t_{n+1}$

$\boxed{Q4}$: En déduire que pour tout entier naturel n , on a

A) $z_{n+6}=2z_n$	B) $z_{n+6}=-z_n$	C) $z_{n+6}=z_n$	D) $z_{n+6}=-2z_n$

$\boxed{Q5}$: La valeur de z_{2015} est

A) $-1+2i\sqrt{3}$	B) $3+i\sqrt{3}$	C) $3i\sqrt{2}$	D) $-1+i\sqrt{3}$

Exercice 6 :

Le plan complexe P est rapporté au repère direct $(O,\vec{u},\vec{v})$; unité graphique $1cm$

Soit A le point d'affixe $3i$. On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z , distinct de A , associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z'=\frac{3iz-7}{z-3i}$$

On dit que M est invariant si $M=M'$

$\boxed{Q1}$: f admet deux points invariants B et C et on note z_B et z_C leurs affixes respectives . Montrer que la somme des parties imaginaires de z_B et z_C vaut

A) -6	B) 6	C) 5	D) -5

On admet que B et C sont tels que $\left|\mathrm{Im}(z_B)\right|>\left|\mathrm{Im}(z_C)\right|$ et on appelle $\mathcal{E}$ le cercle de diamètre $[BC]$

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ différent de B et de C et M' son image par f

$\boxed{Q2}$: Il existe un réel θ tel que l'affixe z de M s'écrit

A) $3i-4e^{i\theta}$	B) $-3i-4e^{i\theta}$	C) $3i+4e^{-i\theta}$	D) $3i+4e^{i\theta}$

$\boxed{Q3}$: Il existe un réel θ tel que l'affixe z' de M' s'écrit

A) $3i-4e^{-i\theta}$	B) $-3i+4e^{i\theta}$	C) $-3i-4e^{-i\theta}$	D) $3i+4e^{-i\theta}$

$\boxed{Q4}$: Le point M'

A) est à l'intérieur du cercle $\mathcal{E}$	B) est à l'extérieur du cercle $\mathcal{E}$	C) appartient au cercle $\mathcal{E}$	D) est le centre du cercle $\mathcal{E}$

Exercice 7 :

$\boxed{Q1}$: Soit $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$ l' espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

Alors $\dim M_n(\mathbb{R})=$

A) n^2	B) $2n$	C) n

$\boxed{Q2}$: Soit $B=\{u,v,w\}$ une base de $(\mathbb{R}^3,+,.)$

On considère les familles suivantes :

$S_1=\{v+w,u+w,u+v\}$

$S_2=\{u+v,u+w,w-v\}$

$S_3=\{u,w,u-v\}$

Alors laquelle (ou lesquelles) des familles forme une base

A) Aucune	B) Seulement S_1	C) Seulement S_1 et S_3

$\boxed{Q3}$: Soit $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=z\}$.

Lequel des familles suivantes forme une base pour E

A) $\{(1,0,1)\}$	B) $\{(1,0,1);(0,1,0)\}$	C) $\{(1,1,0);(1,0,1);(0,1,1)\}$

$\boxed{Q4}$: Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^2-3A+2I_n=O$ (I_n est la matrice identité)

On considère les égalités suivantes

(I). $A^{-1}=I_n-A$

(II). $A^{-1}=\dfrac{1}{2}(3I_n-A)$

(III). $détA=0$

(IV). $détA\neq 0$

Alors

a) (II) et (III) sont vraies	b) (I) et (IV) sont vraies	c) (II) et (IV) sont vraies

Exercice 8 :

$\boxed{Q1}$: On considère la matrice $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

La matrice B^{13} vaut :

a) $\begin{pmatrix}1&13&91\\0&1&13\\0&0&1\end{pmatrix}$	b) $\begin{pmatrix}1&13&92\\0&1&13\\0&0&1\end{pmatrix}$	c) $\begin{pmatrix}1&13&93\\0&1&13\\0&0&1\end{pmatrix}$	d) $\begin{pmatrix}1&13&94\\0&1&13\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\boxed{Q2}$:

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{1 \le i, j \le n}$ une matrice d'ordre n

On appelle la trace de A notée par $Tr(A)$ le nombre $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Alors $Tr(A + I_n) =$

a) $Tr(A) + n$	b) $nTr(A)$	c) $Tr(A) + 1$

$\boxed{Q3}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{3n-1}\right)^{2n-1} =$

a) 0	b) $\dfrac{1}{3}$	c) $+\infty$

$\boxed{Q4}$: Soit $w_n = \sum_{p=2}^{n} \dfrac{1}{p^2 - 1}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n =$

a) $\dfrac{3}{2}$	b) $\dfrac{3}{4}$	c) $+\infty$

$\boxed{Q5}$:

La partie imaginaire du nombre complexe $z = \left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$ vaut :

a) $\sqrt{3}^{20}$	b) $-512\sqrt{3}$	c) $-20\sqrt{3}$	d) $512\sqrt{3}$

$\boxed{Q6}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2 + (-1)^n} =$

a) 1	b) $\sqrt{2}$	c) $\sqrt{3}$	d) $+\infty$

$\boxed{Q7}$:

$n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \sum\limits_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} Min(i, j) =$

a) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	b) $\dfrac{n(n+1)}{3}$	c) $\dfrac{n(n+2)}{3}$	d) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{6}$

Correction d'exercice 1

$\boxed{Q1}$:

On rappelle que : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{12} C_n^{12}\right) - 34 = \frac{1}{2}\times\left(2^{12}\right) - 34 = 2^{11} - 34 = 2048 - 34 = 2014$$

$\boxed{Q2}$:

On rappelle que : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$S = \sum_{k=1}^{35} k^2 = \frac{35\times(35+1)(2(35)+1)}{6} = \frac{35\times 36\times 71}{6} = 14910$$

$\boxed{Q3}$:

On rappelle que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$$

$\boxed{Q4}$:

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \le k \le 2n+1$

On a $0 \le k \le 2n+1$

Donc $n^2 \le n^2 + k \le n^2 + 2n + 1$

Donc $n^2 \le n^2 + k \le (n+1)^2$

Donc $\frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{1}{n^2+k} \le \frac{1}{n^2}$

Donc $\frac{n}{(n+1)^2} \le \frac{n}{n^2+k} \le \frac{n}{n^2}$

Donc $\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{(n+1)^2} \le \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k} \le \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{n}$

On en déduit que $\frac{n(2n+2)}{(n+1)^2} \le \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k} \le \frac{(2n+2)}{n}$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(2n+2)}{(n+1)^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2}{n^2}=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+2}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{n}=2$

Alors , $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{n}{n^2+k}=2$.

$\boxed{Q5}$:

On rappelle que : $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{10x}-e^{7x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{10x}-1}{x}-\frac{e^{7x}-1}{x}=\lim_{x\to0}10.\frac{e^{10x}-1}{10x}-7.\frac{e^{7x}-1}{7x}=10-7=3$$

$\boxed{Q6}$:

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{e^x}{(10-3e^x)^2}dx &= \frac{-1}{3}\int_0^1\frac{-3e^x}{(10-3e^x)^2}dx\\ &=\frac{-1}{3}\int_0^1\frac{(10-3e^x)'}{(10-3e^x)^2}dx\\ &=\frac{-1}{3}\left[\frac{-1}{10-3e^x}\right]_0^1\\ &=\frac{-1}{3}\left(\frac{-1}{10-3e}+\frac{1}{7}\right)\\ &=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10-3e}-\frac{1}{7}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{Q7}$:

(Intégration par parties)

- $\displaystyle\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2dx=\int_1^e\frac{1}{x^2}(\ln x)^2dx$

$$\begin{cases}u(x)=(\ln x)^2\\ v'(x)=\dfrac{1}{x^2}\end{cases}\quad\longleftrightarrow\quad\begin{cases}u'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}\\ v(x)=\dfrac{-1}{x}\end{cases}$$

$$\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2dx=\left[\frac{-(\ln x)^2}{x}\right]_1^e-\int_1^e\frac{-1}{x}\times\frac{2\ln x}{x}dx$$
$$=\left(\frac{-1}{e}\right)+2\int_1^e\frac{1}{x^2}\ln(x)dx$$

- Calculons l'intégrale : $\int_1^e\frac{1}{x^2}\ln(x)dx$:

$$\begin{cases}h(x)=\ln x\\ g'(x)=\frac{1}{x^2}\end{cases}\searrow\quad\begin{cases}h'(x)=\frac{1}{x}\\ g(x)=\frac{-1}{x}\end{cases}\updownarrow$$

$$\int_1^e\frac{1}{x^2}\ln(x)dx=\left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\times\frac{-1}{x}dx$$
$$=\left(\frac{-1}{e}\right)+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx$$
$$=\frac{-1}{e}+\left[\frac{-1}{x}\right]_1^e$$
$$=\frac{-1}{e}+\left(\frac{-1}{e}+1\right)$$
$$=1-\frac{2}{e}$$

- $\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2dx=\frac{-1}{e}+2\left(1-\frac{2}{e}\right)=2-\frac{5}{e}$

$\boxed{Q8}$:

Cherchons A et B tels que : $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$ (Rq : $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$
)

On a : $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}=\frac{(A+B)x+(2A+B)}{x^2+3x+2}$

Donc : $\begin{cases}A+B=0\\2A+B=1\end{cases}$ donc $\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \left[\ln(x+1)-\ln(x+2)\right]_0^1 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$\boxed{Q9}$:

Rappelons que $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

Calculons : λ^3

$$\lambda^3 = \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}\right)^3$$

$$\lambda^3 = \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}\right)^3 - 3\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}.\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}.\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}\right)$$

$$\lambda^3 = 3+\sqrt{9+\frac{125}{27}} + 3 - \sqrt{9+\frac{125}{27}} - 3\sqrt[3]{\sqrt{9+\frac{125}{27}}^2 - 3^2}.\lambda$$

$$\lambda^3 = 6 - 3\sqrt[3]{\frac{125}{27}}.\lambda$$

$$\lambda^3 = 6-5.\lambda$$

$$\lambda^3 + 5.\lambda - 6 = 0$$

$$\lambda^3 - 1 + 5.\lambda - 5 = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)+5.(\lambda-1)=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+6)=0$$

$\lambda = 1$ ou $\lambda^2+\lambda+6=0$ $(\Delta<0)$

$\lambda = 1$

Correction d'exercice 2

$\boxed{Q1}$:

- On pose $I=\int_0^{\pi} e^t\cos(2t)dt$

$$\begin{cases} u(t)=e^t \\ v'(t)=\cos(2t) \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(t)=e^t \\ v(t)=\dfrac{1}{2}\sin(2t) \end{cases}$$

$$I=\int_0^{\pi} e^t\cos(2t)dt=\left[\frac{1}{2}e^t\sin(2t)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin(2t)e^t dt=0-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(2t)e^t dt=\frac{-1}{2}\int_0^{\pi}\sin(2t)e^t dt$$

- On pose $J=\int_0^{\pi}\sin(2t)e^t dt$

$$\begin{cases} h(t)=e^t \\ g'(t)=\sin(2t) \end{cases} \qquad \begin{cases} h'(t)=e^t \\ g(t)=\dfrac{-1}{2}\cos(2t) \end{cases}$$

$$J=\left[\frac{-1}{2}\cos(2t)e^t\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{-1}{2}\cos(2t)e^t dt$$

$$J=\frac{1-e^{\pi}}{2}+\frac{1}{2}I$$

- $I=\dfrac{-1}{2}\left(\dfrac{1-e^{\pi}}{2}+\dfrac{1}{2}I\right)=\dfrac{e^{\pi}-1}{4}-\dfrac{1}{4}I$

  $\dfrac{5}{4}I=\dfrac{e^{\pi}-1}{4}$

  $I=\dfrac{e^{\pi}-1}{5}$

$\boxed{Q2}$:

Rappelons que : $\cos^2(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos(2t)$

$$\int_0^{\pi} e^t\cos^2(t)dt=\int_0^{\pi} e^t\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt$$

$$\int_0^{\pi} e^t\cos^2(t)dt=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}e^t dt+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(2t)e^t dt$$

$$\int_0^{\pi} e^t \cos^2(t)dt = \left[\frac{1}{2}e^t\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\pi}-1}{5}\right)$$

$$\int_0^{\pi} e^t \cos^2(t)dt = \left(\frac{e^{\pi}}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\pi}-1}{5}\right) = \frac{3\left(e^{\pi}-1\right)}{5}$$

Correction d'exercice 3

$\boxed{Q1}$:

(Intégration par changement de variable)

$$u = a+b-t$$

$$\begin{cases} t = a \rightarrow u = b \\ t = b \rightarrow u = a \end{cases}$$

$$du = -dt$$

$$I = \int_a^b tf(t)dt = -\int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)du$$

$$I = \int_a^b (a+b-u)f(u)du \qquad (u \in [a,b] \quad et \quad f(a+b-u) = f(u))$$

$$I = \int_a^b (a+b)f(u)du - \int_a^b uf(u)du$$

$$I = \int_a^b (a+b)f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt$$

$$I = (a+b)\int_a^b f(t)dt - I$$

$$2I = (a+b)\int_a^b f(t)dt$$

$$I = \frac{(a+b)}{2}\int_a^b f(t)dt$$

$\boxed{Q2}$:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}dt = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)^2}dt$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{3}\int_0^{\pi} \frac{\frac{-\sin t}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)^2}dt$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{3}\int_0^{\pi} \frac{\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)^2}dt$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{3}\left[Ac\tan\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{3}\left(Arc\tan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) - Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{3}\times -2Ac\tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$\boxed{Q3}$:

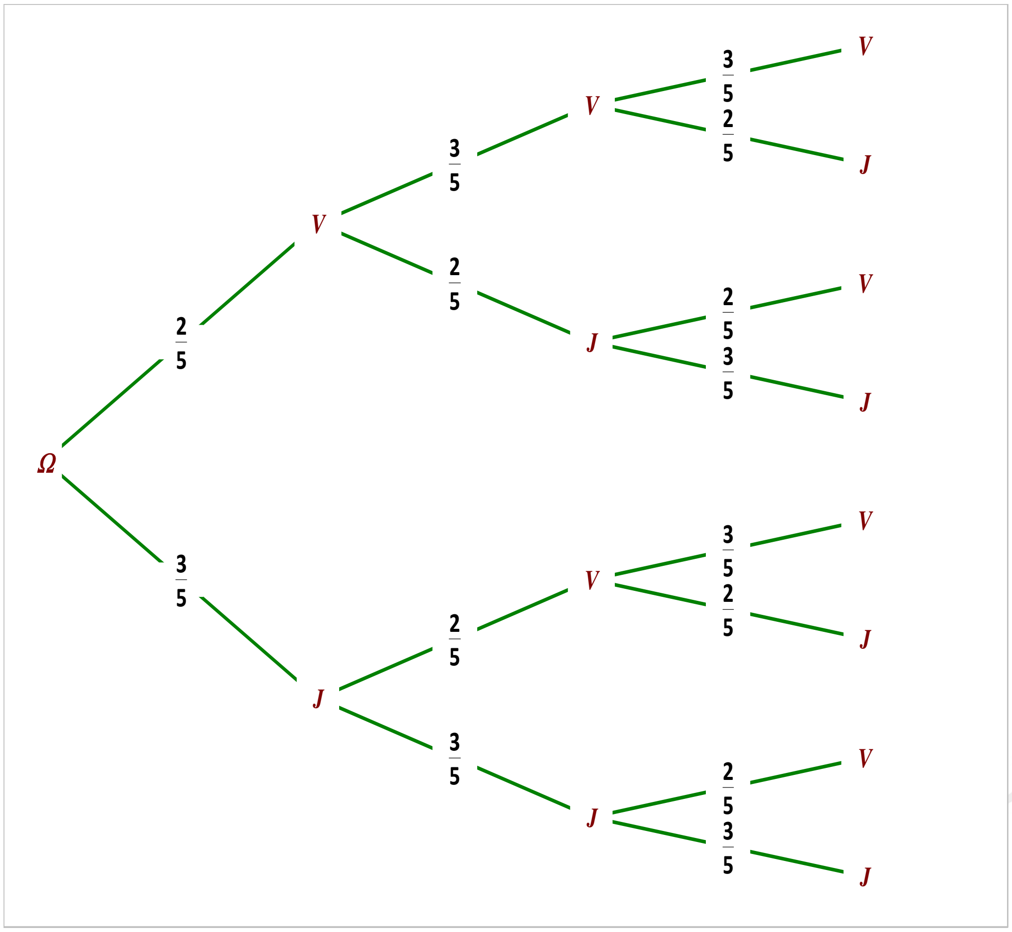
On pose $f(t) = \dfrac{\sin t}{3+\cos^2 t}$

On a :

$$\forall t \in [0,\pi] \quad f(0+\pi-t) = f(\pi-t) = \frac{\sin(\pi-t)}{3+\cos^2(\pi-t)} = \frac{\sin t}{3+(-\cos t)^2} = \frac{\sin t}{3+\cos t^2} = f(t)$$

Donc : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{3+\cos^2 t}dt = \int_0^{\pi} tf(t)dt = \frac{0+\pi}{2}\int_0^{\pi} f(t)dt = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$

Correction d'exercice 4



....

....

....

....

$\boxed{Q1}$:

$$p_1 = p(E_1) = \frac{2}{5} = 0{,}40$$

$\boxed{Q2}$:

$$p_{E_1}(E_2) = \frac{3}{5} = 0{,}60$$

$\boxed{Q3}$:

$$p_2 = p(E_2) = p(E_1) \times p_{E_1}(E_2) + p(\overline{E_1}) \times p_{\overline{E_1}}(E_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = 0{,}48$$

$\boxed{Q4}$:

$$p_{n+1} = p\left(E_{n+1}\right) = p\left(E_n\right)\times p_{E_n}\left(E_{n+1}\right) + p\left(\overline{E_n}\right)\times p_{\overline{E_n}}\left(E_{n+1}\right) = p_n \times \frac{3}{5} + \left(1-p_n\right)\times\frac{2}{5} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}$$

$$\boxed{5p_{n+1} = p_n + 2}$$

$\boxed{Q5}$:

On a $5p_{n+1} = p_n + 2$ donc $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}$

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par : $u_n = p_n - \dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5}} = p_n - \dfrac{1}{2}$

On a : $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{10} = \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5}\times u_n$

Donc la suite $\left(u_n\right)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{10}$

Donc : $u_n = u_1 \times q^{n-1} \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

Donc : $u_n = \frac{-1}{10}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

Donc : $p_n = \frac{-1}{10}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n} + \frac{1}{2} \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

Puisque $-1 < \frac{1}{5} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n} = 0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$

Correction d'exercice 5

$\boxed{Q1}$:

On : $\dfrac{a-b}{c-b}=\dfrac{2-3-i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}}=\dfrac{i\sqrt{3}\left(-1+i\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}{3\left(-1+i\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}i=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc : $\arg\left(\dfrac{a-b}{c-b}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : La mesure de l'angle $A\widehat{B}C$ vaut 90°

$\boxed{Q2}$:

$\omega=\dfrac{a+c}{2}=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$

$\boxed{Q3}$:

$$\begin{aligned}
t_{n+1} &= z_{n+1}-\omega \\
&=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2-1-i\sqrt{3} \\
&=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+1-i\sqrt{3} \\
&=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(z_n+\frac{2-2i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right) \\
&=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(z_n+\frac{\left(2-2i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{4}\right) \\
&=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(z_n-\left(1+i\sqrt{3}\right)\right) \\
&=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\times t_n
\end{aligned}$$

$\boxed{Q4}$:

On a (t_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme

$t_0=z_0-\omega=0-\omega=-\omega$

Donc : $t_n=t_0\times q^n=-\omega\times\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$

Et on a $t_n=z_n-\omega$ donc $z_n=t_n+\omega$

Donc $z_n=-\omega\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\omega=\omega\left[1-\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]$

D'autre part on a : $z_{n+6}=t_{n+6}+\omega=\omega\left[1-\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+6}\right]=\omega\left[1-\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]$

(car ; $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6=e^{i2\pi}=1$)

On déduit que : $z_{n+6}=z_n$

$\boxed{Q5}$:

Remarquons que pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a : $z_{n+6k}=z_n$

$$z_{2015}=z_{5+6(335)}=z_5=\omega\left[1-\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^5\right]=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left[1-e^{i\frac{5\pi}{3}}\right]=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left[1-e^{i\frac{-\pi}{3}}\right]=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left[\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=-1+i\sqrt{3}$$

Correction d'exercice 6

$\boxed{Q1}$:

Déterminons l'affixe z du point M tel que $f(M)=M$

On a : $z=\dfrac{3iz-7}{z-3i}$ $(z\neq 3i)$

Equivaut $z^2-6iz+7=0$ $(z\neq 3i)$

On a $\Delta=-64=(8i)^2$

Donc $z_1=\dfrac{6i-8i}{2}=-i$ et $z_2=\dfrac{6i+8i}{2}=7i$

Donc $\operatorname{Im} z_1+\operatorname{Im} z_2=-1+7=6$

$\boxed{Q2}$:

Soit $M(x,y)$ un point quelconque de $\mathcal{E}$ différent de B et de C

On a $\mathcal{E}$ est le cercle de diamètre $[BC]$ donc le cercle $\mathcal{E}$ a pour rayon R : $R=\dfrac{|z_C-z_B|}{2}=4$ et de centre $\Omega(\omega)$ tel que $\Omega(\omega)$ est le milieu du segment $[BC]$: $\omega=\dfrac{z_B+z_C}{2}=3i$

Donc une représentation paramétrique du cercle $\mathcal{E}$ est : $(\exists\theta\in\mathbb{R})$, $\begin{cases} x=4\cos\theta \\ y=3+4\sin\theta \end{cases}$

Si z est l'affixe du point M alors $z=x+iy$

Donc Il existe un réel θ tel que :

$$z=4\cos(\theta)+i\left(3+4\sin(\theta)\right)=3i+4\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=3i+4e^{i\theta}$$

$\boxed{Q3}$:

$$z' = \frac{3iz - 7}{z - 3i}$$

$$z' = \frac{3i\left(3i + 4e^{i\theta}\right)}{3i + 4e^{i\theta} - 3i}$$

$$z'z' = \frac{-9 + 12ie^{i\theta} - 7}{4e^{i\theta}}$$

$$z' = \frac{12ie^{i\theta} - 16}{4e^{i\theta}}$$

$$z' = 3i - 4e^{-i\theta}$$

$\boxed{Q4}$:

$$\Omega M' = \left|z' - \omega\right| = \left|3i - 4e^{-i\theta} - 3i\right| = \left|-4e^{-i\theta}\right| = \left|-4\right| \times \left|e^{-i\theta}\right| = 4 \times 1 = 4$$

Puisque $\Omega M' = R$ alors M' appartient au cercle $\mathcal{E}$

Correction d'exercice 7

$\boxed{Q1}$:

$$\dim M_n(\mathbb{R}) = card\left(a_{ij}\right)_{1 \le i, j \le n} = n^2 \quad \text{avec } a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(un e matrice remplie par des zéros sauf le coefficient qui se trouve dans la i ème ligne et la j ème colonne vaut 1)

$\boxed{Q2}$:

- $S_1=\{v+w,u+w,u+v\}$

$$\text{On a : }\begin{array}{c|ccc|} & v+w & u+w & u+v \\ u & 0 & 1 & 1 \\ v & 1 & 0 & 1 \\ w & 1 & 1 & 0 \end{array} = 2\neq 0$$

- $S_2=\{u+v,u+w,w-v\}$

$$\text{On a : }\begin{array}{c|ccc|} & u+v & u+w & w-v \\ u & 1 & 1 & 0 \\ v & 1 & 0 & -1 \\ w & 0 & 1 & 1 \end{array} = 0$$

- $S_3=\{u,w,u-v\}$

$$\text{On a : }\begin{array}{c|ccc|} & u & w & u-v \\ u & 1 & 0 & 1 \\ v & 0 & 0 & -1 \\ w & 0 & 1 & 0 \end{array} = -1\neq 0$$

$\boxed{\text{Seulement } S_1 \text{ et } S_3}$

<u>Autre méthode ;</u>

- puisque $B=\{u,v,w\}$ une base de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ et $cardS_1=cardS_3=3=\dim\mathbb{R}^3$ alors il suffit de montrer que S_1 et S_3 sont des familles libres
- pour S_2 : remarquer que $1(u+v)-1(u+w)+1(w-v)=0_{\mathbb{R}^3}$ et $(1,-1,1)\neq(0,0,0)$

$\boxed{Q3}$:

- Soit $(x,y,z)\in E$

On a $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $x=z$

$(x,y,z)=(x,y,x)=(x,0,x)+(0,y,0)=x(1,0,1)+y(0,1,0)$

Donc $\{(1,0,1);(0,1,0)\}$ est unr famille génératrice de E

- Montrons que $\{(1,0,1);(0,1,0)\}$ est une famille libre

  En effet :

  $\alpha(1,0,1)+\beta(0,1,0)=(0,0,0)\Rightarrow(\alpha,0,\alpha)+(0,\beta,0)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow (\alpha,\beta,\alpha)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow \alpha=0, \beta=0$$

On déduit que $\{(1,0,1);(0,1,0)\}$ forme une base de E

(remarque : $\dim E = 2$)

$\boxed{Q4}$:

Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^2-3A+2I_n=O$

On a :

$$\begin{aligned} A^2-3A+2I_n=O &\Leftrightarrow A^2-3A=-2I_n \\ &\Leftrightarrow A(A-3I_n)=-2I_n \\ &\Leftrightarrow A\left(\frac{1}{2}(3I_n-A)\right)=I_n \end{aligned}$$

Donc (II) et (IV) sont vraies

Correction d'exercice 8

$\boxed{Q1}$:

On a : $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A+I$ avec $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A.A^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Donc pour tout entier naturel k tel que $k\geq 3$, on a : $A^k=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$B^{13}=(A+I_3)^{13}=\sum_{k=0}^{13}C_{13}^{k}A^{k}=C_{13}^{0}I_3+C_{13}^{1}A+C_{13}^{2}A^{2}=1.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+13.\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+78.\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&13&91\\0&1&13\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\boxed{Q2}$:

Rappelons que $Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)$

$$Tr(A+I_n)=Tr(A)+Tr(I_n)=Tr(A)+\sum_{i=1}^{n}1=Tr(A)+n$$

$\boxed{Q3}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to+\infty}e^{(2n-1)\ln\left(\frac{n}{3n-1}\right)}=\lim_{t\to-\infty}e^{t}=0\quad\left(\begin{array}{c}t=(2n-1)\ln\left(\frac{n}{3n-1}\right)\\ \lim\limits_{n\to+\infty}2n-1=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n}{3n-1}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)<0\\ n\to+\infty\quad t\to-\infty\end{array}\right)$$

$\boxed{Q4}$:

On a :

$$\begin{aligned}w_n&=\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p^2-1}\\&=\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p-1}-\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p}-\sum_{p=3}^{n+1}\frac{1}{p}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{p=3}^{n-1}\frac{1}{p}+1+\frac{1}{2}-\sum_{p=3}^{n-1}\frac{1}{p}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\dfrac{3}{4}$

$\boxed{Q5}$:

On a :

$$z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^{20}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20}=\sqrt{2}^{20}e^{i\frac{140\pi}{12}}=2^{10}e^{-i\frac{\pi}{3}}=2^{10}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)=2^{10}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=512-i\,512\sqrt{3}$$

Donc : $\mathrm{Im}(z)=-512\sqrt{3}$

$\boxed{Q6}$:

On pose $u_n=\sqrt[n]{2+(-1)^n}$

On a : $\ln(u_n)=\ln\left(\sqrt[n]{2+(-1)^n}\right)=\frac{1}{n}\ln\left(2+(-1)^n\right)$

Il est évident que : $0\le\ln(u_n)\le\frac{\ln 3}{n}$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln 3}{n}=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=0$

D’où $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

$\boxed{Q7}$:

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} Min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Min(i,j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} Min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} Min(i,j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)i - \frac{1}{2}i^2\right)$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right).\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \left(\frac{2n+1}{2}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{1}{2}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{2n(2n+1)(n+1)}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

つづく

math.ma