المعادلات التفاضلية

السلسلة 1 (4 تمارين)

التمرين 1 :

نعتبر المعادلة التفاضلية $(E)\quad 2y'-y=0$

1) حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية (E)

2) حدد الحل f **للمعادلة التفاضلية** (E) **و الذي يحقق** $f(1)=\sqrt{2}$

التمرين 2 :

لتكن f **دالة عددية قابلة للإشتقاق على** $\mathbb{R}$ **بحيث :**

لكل x **من** $\mathbb{R}$ **:** $f'(x)=(2-3f(x))f(x)$ **و** $f(x)\neq 0$ **و** $f(0)=1$

نضع $(\forall x\in\mathbb{R})\quad g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

1) بين أن g **حل لمعادلة تفاضلية من الدرجة الأولى يتم تحديدها**

2) حدد تعبير $f(x)$

التمرين 3 :

حل المعادلات التفاضلية :

$(E_1)\quad y''-2y'-3y=0$

$(E_2)\quad 9y''-6y'+y=0$

$(E_3)\quad y''-4y'+13y=0$

التمرين 4 :

لتكن المعادلة التفاضلية $(E):\quad y'+3y=x^2$

1) حدد دالة حدودية g **من الدرجة الثانية تكون حلا للمعادلة التفاضلية** (E)

2) بين أن دالة f **تكون حلا للمعادلة التفاضلية** (E) **إذا وفقط إذا كانت** $f-g$ **حلا للمعادلة التفاضلية** $(E_1):\quad y'+3y=0$

3) حل المعادلة التفاضلية (E_1) **ثم استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية** (E)

تصحيح التمرين الأول

1) المعادلة $2y'-y=0$ (E) تكافئ $y'=\frac{1}{2}y$

مجموعة حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$: $y:x\mapsto \lambda e^{\frac{1}{2}x}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$

2) f يحقق المعادلة (E) إذن $f(x)=\lambda e^{\frac{x}{2}}$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

و بما أن $f(1)=\sqrt{2}$ فإن $\lambda e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ إذن $\lambda\sqrt{e}=\sqrt{2}$ إذن $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{2e}}{e}$

و منه : $f(x)=\frac{\sqrt{2e}}{e}e^{\frac{x}{2}}=\sqrt{2e}\,e^{\frac{x}{2}-1}$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

تصحيح التمرين الثاني

1) لتكن f دالة عددية قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث :

لكل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=(2-3f(x))f(x)$ و $f(x)\neq 0$

$$g'(x)=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'$$
$$g'(x)=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$
$$g'(x)=\frac{-(2-3f(x))f(x)}{(f(x))^2}$$
$$g'(x)=\frac{3f(x)-2}{f(x)}$$
$$g'(x)=3-\frac{2}{f(x)}$$
$$g'(x)=3-2g(x)$$
$$g'(x)=-2g(x)+3$$

إذن g حل للمعادلة التغاضلية $y'=-2y+3$

2) لدينا g حل للمعادلة التغاضلية $y'=-2y+3$

إذن $g(x)=\lambda e^{-2x}-\frac{3}{-2}$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

إذن : $g(x)=\lambda e^{-2x}+\frac{3}{2}$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x)=\dfrac{1}{\lambda e^{-2x}+\dfrac{3}{2}}$

و بما أن $f(0)=1$ فإن $\dfrac{1}{\lambda+\dfrac{3}{2}}=1$ إذن $\lambda=\dfrac{-1}{2}$

و بالتالي : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x)=\dfrac{1}{\dfrac{-1}{2}e^{-2x}+\dfrac{3}{2}}$

أي : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x)=\dfrac{2}{3-e^{-2x}}$

تصحيح التمرين الثالث

✓ لنحل المعادلة التفاضلية $(E_1) \quad y''-2y'-3y=0$

- المعادلة المميزة $r^2-2r-3=0$

لدينا $\Delta=16$

إذن المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين : $r_2=3$ و $r_1=-1$

- إذن مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $(E_1) \quad y''-2y'-3y=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \quad y:x\mapsto \alpha e^{-x}+\beta e^{3x}$

✓ لنحل المعادلة التفاضلية $(E_2) \quad 9y''-6y'+y=0$

- المعادلة المميزة $9r^2-6r+1=0$

لدينا $\Delta=0$

إذن المعادلة المميزة تقبل حلا وحيدا : $r_0=\dfrac{1}{3}$

- إذن مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $(E_2) \quad 9y''-6y'+y=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \quad y:x\mapsto (\alpha x+\beta)e^{\frac{1}{3}x}$

✓ لنحل المعادلة التفاضلية $(E_3) \quad y''-4y'+13y=0$

- المعادلة المميزة $r^2-4r+13=0$

لدينا $\Delta=-36$

إذن المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين مترافقين أحدهما : $r=2+3i$

- إذن مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $y''-4y'+13y=0$ (E_3) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \quad y:x\mapsto(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)e^{2x}$$

تصحيح التمرين الرابع

1) لنحدد دالة حدودية g من الدرجة الثانية تكون حلا للمعادلة التفاضلية $(E): \ y'+3y=x^2$

نضع $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad g(x)=ax^2+bx+c$

لدينا $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad g'(x)=2ax+b$

g حل للمعادلة $(E): \ y'+3y=x^2$ إذن $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad g'(x)+3g(x)=x^2$

إذن $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad 2ax+b+3(ax^2+bx+c)=x^2$

إذن $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad 2ax+b+3ax^2+3bx+3c=x^2$

إذن $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad 3ax^2+(2a+3b)x+(b+3c)=x^2$

و منه : $\begin{cases}3a=1\\2a+3b=0\\b+3c=0\end{cases}$

و بالتالي : $\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\b=\dfrac{-2}{9}\\c=\dfrac{2}{27}\end{cases}$

نستنتج أن : $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad g(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}$

2)

- ✓ نفترض أن f تكون حلا للمعادلة التفاضلية (E)

إذن $\boxed{1} \quad (\forall x\in\mathbb{R}) \quad f'(x)+3f(x)=x^2$

و نعلم أن g حل للمعادلة التفاضلية (E)

إذن $\boxed{2} \quad (\forall x\in\mathbb{R}) \quad g'(x)+3g(x)=x^2$

بحساب $\boxed{2}-\boxed{1}$ نجد : $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad f'(x)-g'(x)+3f(x)-3g(x)=0$

إذن $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad (f-g)'(x)+3(f-g)(x)=0$

و منه $f-g$ حلا للمعادلة التفاضلية $(E_1): \ y'+3y=0$

- ✓ عكسيا نفترض أن $f-g$ حلا للمعادلة التفاضلية $(E_1): \ y'+3y=0$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (f-g)'(x)+3(f-g)(x)=0$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x)-g'(x)+3f(x)-3g(x)=0$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x)+3f(x)=g'(x)-3g(x)$

و بما أن g حل للمعادلة $(E): \quad y'+3y=x^2$ فإن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x)+3g(x)=x^2$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x)+3f(x)=x^2$

و منه f حل للمعادلة التفاضلية (E)

3)

✓ لنحل المعادلة التفاضلية $(E_1): \quad y'+3y=0$

$(E_1): \quad y'+3y=0$ تكافئ $(E_1): \quad y'=-3y$

مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $(E_1): \quad y'+3y=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$(\lambda \in \mathbb{R}) \quad y: x \mapsto \lambda e^{-3x}$

✓ نعلم أنه $f-g$ حلا للمعادلة التفاضلية $(E_1): \quad y'+3y=0$ تعني أن f تكون حلا للمعادلة التفاضلية (E)

$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (f-g)(x)=\lambda e^{-3x}$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x)=g(x)+\lambda e^{-3x}$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}+\lambda e^{-3x}$ حيث $(\lambda \in \mathbb{R})$

math.ma

つづく