الدوال اللوغارتمية

السلسلة 1 (5 تمارين)

التمرين 1 :

الجزء الأول

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=2x^3-1+2\ln(x)$

1) أدرس تغيرات g على $]0,+\infty[$
2) بين أنه يوجد على α وحيد من $]0,+\infty[$ بحيث $g(\alpha)=0$
3) أدرس إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$

الجزء الثاني

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=2x-\dfrac{\ln x}{x^2}$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم حدد الفروع اللانهائية ل (C_f)
2) أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x$
3) بين أن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة ثم ضع جدول تغيرات f
4) أنشئ (C_f) (نأخذ $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$)

الجزء الثالث

ليكن n من $\mathbb{N}^*$

نرمز ب $\mathcal{D}$ الحيز المستوي المحصور بين (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=n$

1) بين أن مساحة هذا الحيز ب cm^2 هي : $I_n=2\int_1^n \dfrac{\ln x}{x^2}dx$
2) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $\int_1^n \dfrac{\ln x}{x^2}dx$
3) استنتج تعبير I_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

التمرين 2 :

الجزء الأول

نعتبر الدالة f **المعرفة على** $]-1,+\infty[$ **بما يلي :** $f(x)=1+\ln(1+x)$

و ليكن (C_f) **منحناها في معلم متعامد** $(O,\vec{i},\vec{j})$**. و** (D) **المستقيم ذي المعادلة** $y=x$ **.**

1) **أ. أدرس تغيرات** f

ب. أحسب نهايات f **عند محدات** D_f

2) **نعتبر الدالة** g **المعرفة على** $]-1,+\infty[$ **بما يلي :** $g(x)=f(x)-x$

أ. أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)$

ب. حدد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ **و استنتج** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ج. أدرس تغيرات g **ثم ضع جدول تغيراتها**

د. بين أن المعادلة $g(x)=0$ **تقبل بالضبط حلين** α **و** β **حيث** $\alpha\le 0$ **و** $2\le\beta\le 3$

ه. أدرس إشارة $g(x)$ **و استنتج الوضع النسبي ل** (C_f) **و** (D)

الجزء الثاني

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_n$ **المعرفة بما يلي :**

$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

1) **بين أن :** $2\le u_n\le\beta$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

2) **هل** $(u_n)_n$ **متقاربة ؟ علل جوابك**

التمرين 3 :

الجزء الأول

لتكن U **الدالة العددية المعرفة على** $]0,+\infty[$ **بما يلي :** $U(x)=\ln(x)+x-3$

1) **بين أن** U **تزايدية قطعا على** $]0,+\infty[$

2) **بين أن المعادلة** $U(x)=0$ **تقبل حلا و حيدا** α **في المجال** $]0,+\infty[$ **ثم تحقق أن** $2<\alpha<3$

3) **إستنتج إشارة** $U(x)$ **على** $]0,+\infty[$

الجزء الثاني

لتكن f **الدالة العددية المعرفة على** $]0,+\infty[$ **بما يلي :** $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

2) أ- بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{U(x)}{x^2}$

ب- استنتج تغيرات f على $]0,+\infty[$

<u>الجزء الثالث</u>

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\ln(x)$

ليكن (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

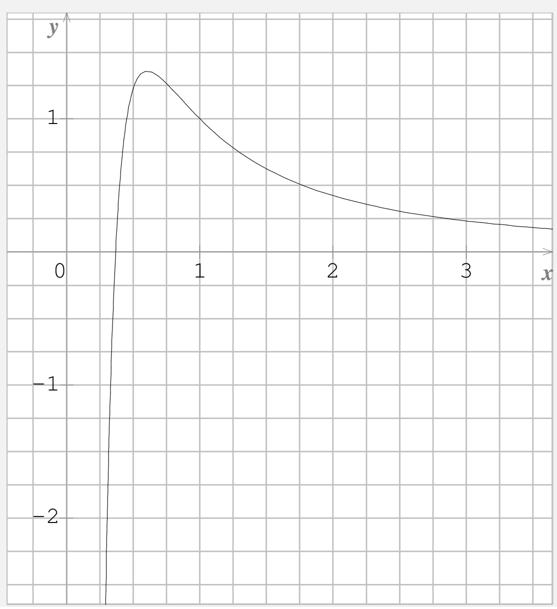
1) بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f(x)-g(x)=\dfrac{2-\ln x}{x}$ و استنتج أن (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة يتم تحديدها .

2) بين أن $H: x\mapsto \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ دالة أصلية للدالة $h: x\mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ على $]0,+\infty[$

3) أحسب التكامل $I=\int_1^{e^2}\dfrac{2-\ln x}{x}dx$ ثم أول مبيانيا هذه النتيجة

التمرين 4 :

لتكن f الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$. و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (أنظر الشكل أسفله)



1) أ- أدرس نهاية f في 0 على اليمين

ب- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ج- حدد مقاربات (C_f)

2) أ- بين أن : $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- حل في $]0,+\infty[$ المتراجحة $-1-2\ln x > 0$. و استنتج إشارة $f'(x)$ على $]0,+\infty[$

ج- ضع جدول تغيرات f

3) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة يتم تحديد إحداثيتيها

ب- إستنتج إشارة $f(x)$ على $]0,+\infty[$

4) لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نرمز ب I_n لمساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = \dfrac{1}{e}$ و $x = n$.

أ- بين أن $0 \le I_2 \le e - \dfrac{1}{2}$

ب- بين أن $F : x \mapsto \dfrac{-2-\ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على $]0,+\infty[$

ج- أحسب I_n بدلالة n

د- أحسب نهاية (I_n) عند $+\infty$.

التمرين 5 :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

<u>الجزء الأول</u>

1) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2 - 2x + 2 > 0$

2) أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم أدرس تغيرات f

3) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

4) أدرس الفروع اللانهائية ل (C_f)

5) بين أن $(D) : x = 1$ هو محور تماثل ل (C_f)

6) مثل مبيانيا (C_f) و $(\Delta) : y = x$

<u>الجزء الثاني</u>

نضع $\varphi(x) = f(x) - x$

1) أحسب $\varphi'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم استنتج أن φ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

2) أ- أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x)$

ب- بين أن لكل $x > 0$: $\varphi(x) = x\left[\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right]$ ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$

ج- بين أن $(\Delta): y = x$ يقطع (C_f) في نقطة وحيدة أفصولها α بحيث $0,3 < \alpha < 0,4$

تصحيح التمرين الأول

الجزء الأول :

1) لندرس تغيرات الدالة g على المجال $]0,+\infty[$:

لدينا g قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا :

$$g'(x) = \left(2x^3 - 1 + 2\ln x\right)' = 6x^2 + \frac{2}{x}$$

إذن : $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x}$

و من الواضح أن $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad g'(x) > 0$

و منه الدالة g تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

2)

- ✓ لدينا g متصلة على $]0,+\infty[$
- ✓ و g تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- ✓ و لدينا $0 \in g(]0,+\infty[)$ **(لأن** $g(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x \to 0^+} g(x), \lim_{x \to +\infty} g(x)\right[=]-\infty,+\infty[$ **)**

و منه يوجد α و حيد من $]0,+\infty[$ بحيث $g(\alpha) = 0$

3) لندرس إشارة $g(x)$:

- ✓ على المجال $]0,\alpha]$: لدينا $0 < x \leq \alpha$ و نعلم أن g تزايدية

  إذن : $g(x) \leq g(\alpha)$

  و منه $g(x) \leq 0$ (لأن $g(\alpha) = 0$)
- ✓ على المجال $[\alpha,+\infty[$: لدينا $x \geq \alpha$ و نعلم أن g تزايدية

  إذن : $g(x) \geq g(\alpha)$

  و منه $g(x) \geq 0$ (لأن $g(\alpha) = 0$)

الجزء الثاني :

(1

✓

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} 2x - \frac{1}{x^2}\ln x = +\infty$$

لأن : $\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \end{cases}$ و $\lim_{x\to 0^+} 2x = 0$

التأويل الهندسي:

(C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$

✓

- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 2x - \frac{\ln x}{x^2}$
$= +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \\ \lim_{x\to +\infty} 2x = +\infty \end{cases}$

- لدينا : $\lim_{x\to +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to +\infty} -\frac{\ln x}{x^2} = 0$

التأويل الهندسي:

(C_f) يقبل مقاربا مقاربا مائلا معادلته $y = 2x$ بجوار $+\infty$

2) ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا : $f(x) - 2x = -\frac{\ln x}{x^2}$

و لدينا : $x^2 > 0$ إذن إشارة $f(x) - 2x$ هي إشارة $-\ln x$

✓ على المجال $]0,1]$:

لدينا $\ln x \le 0$

إذن $-\ln x \geq 0$

و منه $f(x)-2x \geq 0$

و بالتالي (C_f) يوجد فوق المستقيم (Δ)

✓ على المجال $[1,+\infty[$:

لدينا $\ln x \geq 0$

إذن $-\ln x \leq 0$

و منه $f(x)-2x \leq 0$

و بالتالي (C_f) يوجد تحت المستقيم (Δ)

3) ليكن $x \in]0,+\infty[$:

✓ لدينا :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(2x - \frac{\ln x}{x^2}\right)' \\
&= 2 - \frac{\ln'(x)\times x^2 - \ln(x)\times(x^2)'}{(x^2)^2} \\
&= 2 - \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - \ln(x)\times 2x}{x^4} \\
&= 2 - \frac{x - \ln(x)\times 2x}{x^4} \\
&= 2 - \frac{x(1-2\ln x)}{x^4} \\
&= 2 - \frac{1-2\ln x}{x^3} \\
&= \frac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} \\
&= \frac{g(x)}{x^3}
\end{aligned}$$

إذن $(\forall x \in]0,+\infty[)\quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

✓ لدينا : $x^3 > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

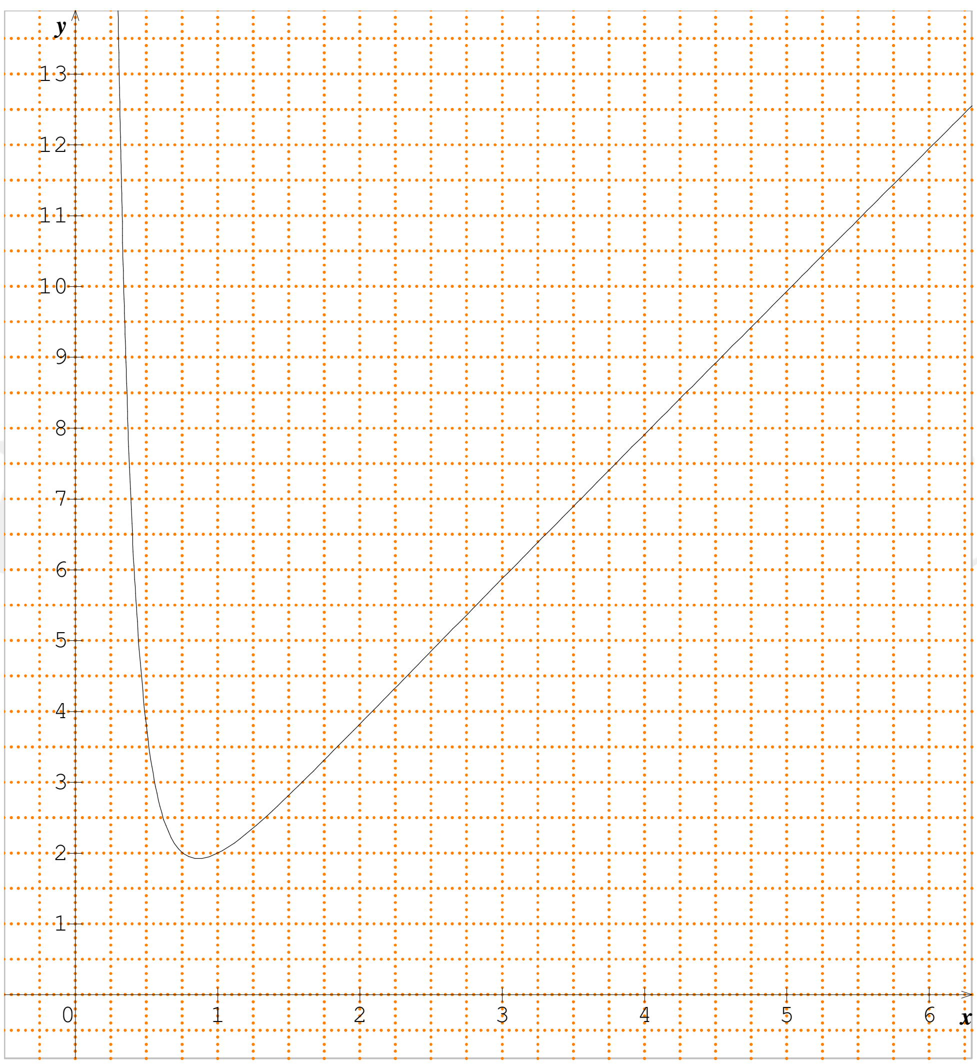
✓ على المجال $]0,\alpha]$: $g(x) \leq 0$ إذن $f'(x) \leq 0$ و منه f تناقصية

و على المجال $[\alpha,+\infty[$: $g(x) \geq 0$ إذن $f'(x) \geq 0$ و منه f تزايدية

جدول تغيرات الدالة f **:**

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

(4



الجزء الثالث :

(1

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n \left|f(x)\right| dx \times \left\|\vec{i}\right\| \times \left\|\vec{j}\right\| \\ &= \int_1^n \left|-\frac{\ln x}{x^2}\right| dx \times 2cm^2 \\ &= 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx \, .cm^2 \end{aligned}$$

(2 لدينا : $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^n \ln(x) \times \frac{1}{x^2} dx$

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{-1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^n - \int_1^n -\frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^n - \left[\frac{1}{x}\right]_1^n \\ &= \left(\left(\frac{-\ln n}{n}\right) - 0\right) - \left(\frac{1}{n} - 1\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n} \end{aligned}$$

(3

✓

$$\begin{aligned} I_n &= 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx \, .cm^2 \\ &= \left(2 - \frac{2}{n} - \frac{\ln n}{n}\right) .cm^2 \end{aligned}$$

✓

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 2.cm^2$$

لأن $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$ و $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

تصحيح التمرين الثاني

الجزء الأول

1) أ- لندرس تغيرات f على المجال $]-1,+\infty[$:

لدينا f قابلة للإشتقاق على $]-1,+\infty[$

ليكن $x \in]-1,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1+\ln(x+1)\right)' \\ &= 0+\frac{(x+1)'}{x+1} \\ &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

إذن : $\left(\forall x \in]-1,+\infty[\right) \quad f'(x)=\frac{1}{x+1}$

لدينا : $x>-1$ إذن $x+1>0$ و منه $\left(\forall x \in]-1,+\infty[\right) \quad f'(x)>0$

و بالتالي : f تزايدية قطعا على المجال $]-1,+\infty[$.

ب- لدينا :

✓ $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} 1+\ln(x+1) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} 1+\ln(t) = -\infty$$

لأن : $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \ln(x+1) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \ln(t) = -\infty \quad \begin{pmatrix} t=1+x \\ x \to -1^+ \\ t \to 0^+ \end{pmatrix}$

✓ $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1+\ln(x+1) = \lim_{t \to +\infty} 1+\ln(t) = +\infty$$

لأن : $\lim_{x \to +\infty} \ln(x+1) = \lim_{t \to +\infty} \ln(t) = +\infty \quad \begin{pmatrix} t=1+x \\ x \to +\infty \\ t \to +\infty \end{pmatrix}$

2) أ- لدينا : $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} g(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x)-x = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} 1+\ln(x+1)-x = -\infty$$

لأن : $\begin{cases} \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} 1+\ln(x+1) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} -x = 1 \end{cases}$

ب-

✓ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0 \quad \begin{pmatrix} t=x+1 \\ x\to+\infty \\ t\to+\infty \end{pmatrix}$$

✓

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} 1+\ln(x+1)-x \\ &= \lim_{x\to+\infty} 1+(x+1).\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x+1=+\infty \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0 \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+1}=-1 \end{cases}$$

ج- الدالة g قابلة للإشتقاق على $]-1,+\infty[$

ليكن $x\in]-1,+\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(f(x)-x\right)' \\ &= f'(x)-1 \\ &= \frac{1}{1+x}-1 \\ &= \frac{1-1-x}{1+x} \\ &= \frac{-x}{x+1}\end{aligned}$$

لدينا : $g'(x)=0 \iff x=0$

و لدينا : $x+1>0$ إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $-x$

x	-1	0	$+\infty$
$-x$	$+$	0	$-$

جدول تغيرات g :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

د-

✓ **على المجال $]-1,0]$:**

- لدينا g متصلة
- و لدينا g تزايدية قطعا
- و لدينا : $0 \in g\left(]-1,0]\right) =]-\infty,1]$

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-1,0]$ و منه $\alpha \leq 0$

✓ **على المجال $[0,+\infty[$**

- لدينا g متصلة
- و لدينا g تناقصية قطعا
- و لدينا : $0 \in g\left([0,+\infty[\right) =]-\infty,1]$

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β من المجال $[0,+\infty[$

- لدينا g متصلة على $[2,3]$
- و $g(2)\times g(3) \leq 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية $2 \leq \beta \leq 3$

✓ خلاصة : المعادلة $g(x)=0$ تقبل بالضبط حلين α و β حيث $\alpha \leq 0$ و $2 \leq \beta \leq 3$

ه-

✓ **على المجال $]-1,\alpha]$:**

لدينا $-1 < x \leq \alpha$ و g تزايدية

إذن : إذن : $g(x) \leq g(\alpha)$

و منه $g(x) \leq 0$ (لأن $g(\alpha)=0$)

✓ **على المجال $[\alpha,\beta]$:**

لدينا : $g\left([\alpha,\beta]\right)=[0,1]$

إذن : $\forall x\in[\alpha,\beta]\quad 0\le g(x)\le 1$

و منه : $\forall x\in[\alpha,\beta]\quad 0\le g(x)$

✓ **على المجال $[\beta,+\infty[$**

لدينا $x\ge\beta$ و g تناقصية

إذن : إذن : $g(x)\le g(\beta)$

و منه $g(x)\le 0$ (لأن $g(\beta)=0$)

الوضع النسبي ل (C_f) و (D)

✓ **على كل من المجالين $]-1,\alpha]$ و $[\beta,+\infty[$:**

لدينا $g(x)\le 0$

إذن : $f(x)-x\le 0$

و منه (C_f) تحت المستقيم (D)

✓ **على المجال $[\alpha,\beta]$:**

لدينا $g(x)\ge 0$

إذن : $f(x)-x\ge 0$

و منه (C_f) فوق المستقيم (D)

الجزء الثاني :

(1

✓ من أجل $n=0$:

لدينا : $u_0=2$

إذن : $2\le u_0\le\beta$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$:

- نفترض أن : $2\le u_n\le\beta$
- و نبين أن : $2\le u_{n+1}\le\beta$ ؟

حسب الإفتراض $2\le u_n\le\beta$ و نعلم أن f تزايدية

إذن : $f(2)\le f(u_n)\le f(\beta)$

إذن : $1+\ln 3\le u_{n+1}\le\beta$

و منه $2 \le u_{n+1} \le \beta$

(لأن $2 \le 1+\ln 3$ و $\begin{aligned} g(\beta)=0 &\Leftrightarrow f(\beta)-\beta=0 \\ &\Leftrightarrow f(\beta)=\beta \end{aligned}$)

- نستنتج أن : $2 \le u_n \le \beta$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) على المجال $[\alpha,\beta]$ لدينا : $f(x)-x \ge 0$

إذن على المجال $[2,\beta]$: $f(x)-x \ge 0$ (لأن $[2,\beta] \subset [\alpha,\beta]$)

و نعلم أن $2 \le u_n \le \beta$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن : $f(u_n)-u_n \ge 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن : $u_{n+1}-u_n \ge 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية

❖ بما أن $(u_n)_n$ تزايدية و مكبورة (بالعدد β) فإن $(u_n)_n$ متقاربة

<u>**ملاحظة :**</u> لدينا :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \in [2,\beta] \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

- f متصلة على $[2,\beta]$
- $f([2,\beta]) \subset [2,\beta]$
- $(u_n)_n$ متقاربة

إذن نهاية $(u_n)_n$ هي حل للمعادلة $f(x)=x$

$$\begin{aligned} f(x)=x &\Leftrightarrow f(x)-x=0 \\ &\Leftrightarrow g(x)=0 \\ &\Leftrightarrow x=\alpha \text{ أو } x=\beta \end{aligned}$$

و بما أن $\alpha \notin [2,\beta]$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$

تصحيح التمرين الثالث

الجزء الأول :

1) لدينا الدالة U قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

ليكن $x \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} U'(x) &= \left(\ln(x)+x-3\right)' \\ &= \frac{1}{x}+1 \\ &= \frac{1+x}{x} \end{aligned}$$

لدينا : $x>0$ إذن $x>0$ و $1+x>0$

إذن $\frac{1+x}{x}>0$

و منه $U'(x)>0 \quad \left(\forall x \in]0,+\infty[\right)$

و بالتالي الدالة U تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

2)

- ✓ U متصلة على $]0,+\infty[$
- ✓ U تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$
- ✓ $0 \in U\left(]0,+\infty[\right) = \left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} U(x), \lim\limits_{x\to+\infty} U(x)\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$

إذن المعادلة $U(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α في المجال $]0,+\infty[$

- ✓ U متصلة على $[2,3]$
- ✓ $\begin{cases} U(2)=\ln(2)-1<0 \\ U(3)=\ln 3>0 \end{cases} \Rightarrow U(2)\times U(3)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $2<\alpha<3$

3) لندرس إشارة $U(x)$:

ليكن $x \in]0,+\infty[$:

- ✓ على المجال $]0,\alpha]$

لدينا $0<x\le\alpha$ و U تزايدية

إذن $U(x) \leq U(\alpha)$

و منه $U(x) \leq 0$ (لأن $U(\alpha)=0$)

✓ على المجال $[\alpha,+\infty[$

لدينا $x \geq \alpha$ و U تزايدية

إذن $U(x) \geq U(\alpha)$

و منه $U(x) \geq 0$ (لأن $U(\alpha)=0$)

الجزء الثاني :

1) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\ln(x)-2\right)+2 = +\infty$$

لأن : $$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1-\frac{1}{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\ln(x)-2\right) = -\infty \end{cases}$$

2) أ- ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\ln(x)-2\right)+2\right)' \\ &= \left(1-\frac{1}{x}\right)'.\left(\ln(x)-2\right)+\left(1-\frac{1}{x}\right).\left(\ln(x)-2\right)'+0 \\ &= \frac{1}{x^2}.\left(\ln(x)-2\right)+\left(1-\frac{1}{x}\right).\frac{1}{x} \\ &= \frac{\ln(x)-2}{x}+\frac{x-1}{x^2} \\ &= \frac{\ln(x)+x-3}{x^2} \end{aligned}$$

إذن : لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{U(x)}{x^2}$

ب- لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\Leftrightarrow U(x)=0 \\ &\Leftrightarrow x=\alpha \end{aligned}$$

لدينا : $x^2 > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $U(x)$

- ✓ على المجال $]0,\alpha[$: لدينا $U(x) \leq 0$

إذن $f'(x) \leq 0$

و منه f تناقصية

- ✓ على المجال $[\alpha,+\infty[$: لدينا $U(x) \geq 0$

إذن $f'(x) \geq 0$

و منه f تزايدية

<u>الجزء الثالث :</u>

1) ليكن $x \in]0,+\infty[$:

- ✓ لدينا :

$$f(x)-g(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2-\ln(x)$$
$$= \ln(x)-2-\frac{\ln(x)}{x}+\frac{2}{x}+2-\ln(x)$$
$$= \frac{2-\ln(x)}{x}$$

إذن لكل x من $]0,+\infty[$: $f(x)-g(x)=\dfrac{2-\ln x}{x}$

- ✓ لنحدد تقاطع (C_f) و (C_g) :

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2-\ln x}{x}=0$$
$$\Leftrightarrow 2-\ln x=0$$
$$\Leftrightarrow \ln x=2$$
$$\Leftrightarrow x=e^2$$

إذن (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة $A(e^2,2)$

2)

- ✓ الدالة H قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$
- ✓ ليكن $x \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left(\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right)' \\ &= \frac{1}{2}\times 2\times \ln'(x)\times\ln(x) \\ &= \frac{1}{x}\times\ln x \\ &= \frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

إذن : لكل x من $]0,+\infty[$: $H'(x)=h(x)$

و منه : $H : x \longmapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ دالة أصلية للدالة $h : x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$ على $]0,+\infty[$

(3

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{e^2} \frac{2-\ln x}{x}dx \\ &= \int_1^{e^2} \frac{2}{x}dx - \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx \\ &= \left[2\ln x\right]_1^{e^2} - \left[H(x)\right]_1^{e^2} \\ &= (4-0)-(2-0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

<u>التأويل الهندسي :</u>

التكامل I يمثل مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$

(بوحدة قياس المساحة)

تصحيح التمرين الرابع

1) أ-

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1+\ln x}{x^2}\\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2}.(1+\ln x)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

لأن :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+\ln x) = -\infty \end{cases}$$

ب-

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

لأن :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \end{cases}$$

ج- لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ إذن (C_f) يقبل مقارب عمودي معادلته $x=0$

و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ إذن (C_f) يقبل مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$

2) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1+\ln x}{x^2}\right)' \\
&= \frac{(1+\ln x)'.x^2-(1+\ln x).(x^2)'}{(x^2)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{x}.x^2-(1+\ln x).2x}{x^4} \\
&= \frac{x-(1+\ln x)\times 2x}{x^4} \\
&= \frac{x(1-2-2\ln x)}{x^4} \\
&= \frac{-1-2\ln x}{x^3}
\end{aligned}$$

إذن : $f'(x)=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب-

✓ لنحل في $]0,+\infty[$ المتراجحة : $-1-2\ln x>0$

$$\begin{aligned}
-1-2\ln x>0 &\Leftrightarrow -1>2\ln x \\
&\Leftrightarrow \ln x<\frac{-1}{2} \\
&\Leftrightarrow x<e^{\frac{-1}{2}}
\end{aligned}$$

إذن : $S=\left]0,e^{\frac{-1}{2}}\right[$

✓

- على المجال $\left]0,e^{\frac{-1}{2}}\right[$: لدينا $x^3>0$ و $-1-2\ln x>0$

إذن : $f'(x)>0$

- على المجال $\left[e^{\frac{-1}{2}},+\infty\right[$: لدينا $x^3>0$ و $-1-2\ln x\le 0$

إذن : $f'(x)\le 0$

ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$e^{(-1/2)}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$e/2$	$\searrow$	0

3) أ- لنبين أن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة :

لنحل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 1+\ln x=0$$
$$\Leftrightarrow \ln x=-1$$
$$\Leftrightarrow x=e^{-1}$$

إذن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة هي $A\left(e^{-1},0\right)$

ب- على المجال $\left]0,e^{-1}\right]$: $f(x)\leq 0$

و عللى المجال $\left[e^{-1},+\infty\right[$: $f(x)\geq 0$

4) أ- على المجال $\left[\frac{1}{e},2\right]$: لدينا $0\leq f(x)\leq \frac{1}{2}e$

إذن : $0\leq \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)dx \leq \frac{1}{2}e\int_{\frac{1}{e}}^{2} dx$

إذن : $0\leq I_2\leq \frac{1}{2}e\left[x\right]_{\frac{1}{e}}^{2}$

إذن : $0\leq I_2\leq \frac{1}{2}e\left(2-\frac{1}{e}\right)$

ومنه : $0\leq I_2\leq e-\frac{1}{2}$

ب- لنبين أن $F:x\longmapsto \frac{-2-\ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على $]0,+\infty[$

✓ لدينا الدالة $F:x\longmapsto \frac{-2-\ln x}{x}$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

ليكن $x\in]0,+\infty[$:

لدينا :

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \left(\frac{-2-\ln x}{x}\right)' \\
&= \frac{(-2-\ln x)'\times x-(-2-\ln x)\times(x)'}{x^2} \\
&= \frac{\frac{-1}{x}\times x-(-2-\ln x)}{x^2} \\
&= \frac{-1+2+\ln x}{x^2} \\
&= \frac{1+\ln x}{x^2}
\end{aligned}$$

إذن : لكل x من $]0,+\infty[$: $F'(x)=f(x)$

ج- لدينا على المجال $\left[\frac{1}{e},n\right]$: $f(x)\geq 0$

إذن :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{\frac{1}{e}}^{n} f(x)dx \\
&= \left[\frac{-2-\ln x}{x}\right]_{\frac{1}{e}}^{n} \\
&= \left(\frac{-2-\ln(n)}{n}\right)-(-e) \\
&= e-\frac{2}{n}-\frac{\ln(n)}{n}
\end{aligned}$$

د- لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e-\frac{2}{n}-\frac{\ln(n)}{n}=e$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0 \end{cases}$

تصحيح التمرين الخامس

الجزء الأول :

1) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

إذن من الواضح أن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2-2x+2>0$

2) لدينا الدالة $u : x \mapsto x^2-2x+2$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لكل x من $\mathbb{R}$: $u(x)>0$

إذن الدالة $f=\ln(u)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln\left(x^2-2x+2\right)\right)' \\ &= \frac{\left(x^2-2x+2\right)'}{x^2-2x+2} \\ &= \frac{2x-2}{x^2-2x+2} \end{aligned}$$

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2-2x+2>0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2x-2$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$2x-2$	$-$ 0 $+$

إذن على المجال $]-\infty,1]$: $f'(x)\le 0$ و على المجال $[1,+\infty[$: $f'(x)\ge 0$

3)

✓ لدينا : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x+2=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \ln t=+\infty \end{cases}$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^2-2x+2\right)=+\infty$

✓ لدينا : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x+2=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \ln t=+\infty \end{cases}$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(x^2-2x+2\right)=+\infty$

4)

✓ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2.\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}+\frac{1}{x}.\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}2\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}.\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

إذن $\left(C_f\right)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

✓ لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

لنحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2-2x+2\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2.\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)}{x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}+\frac{1}{x}.\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}2\frac{\ln(-x)}{x}+\frac{1}{x}.\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

إذن $\left(C_f\right)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$

5) ليكن $x\in\mathbb{R}$:

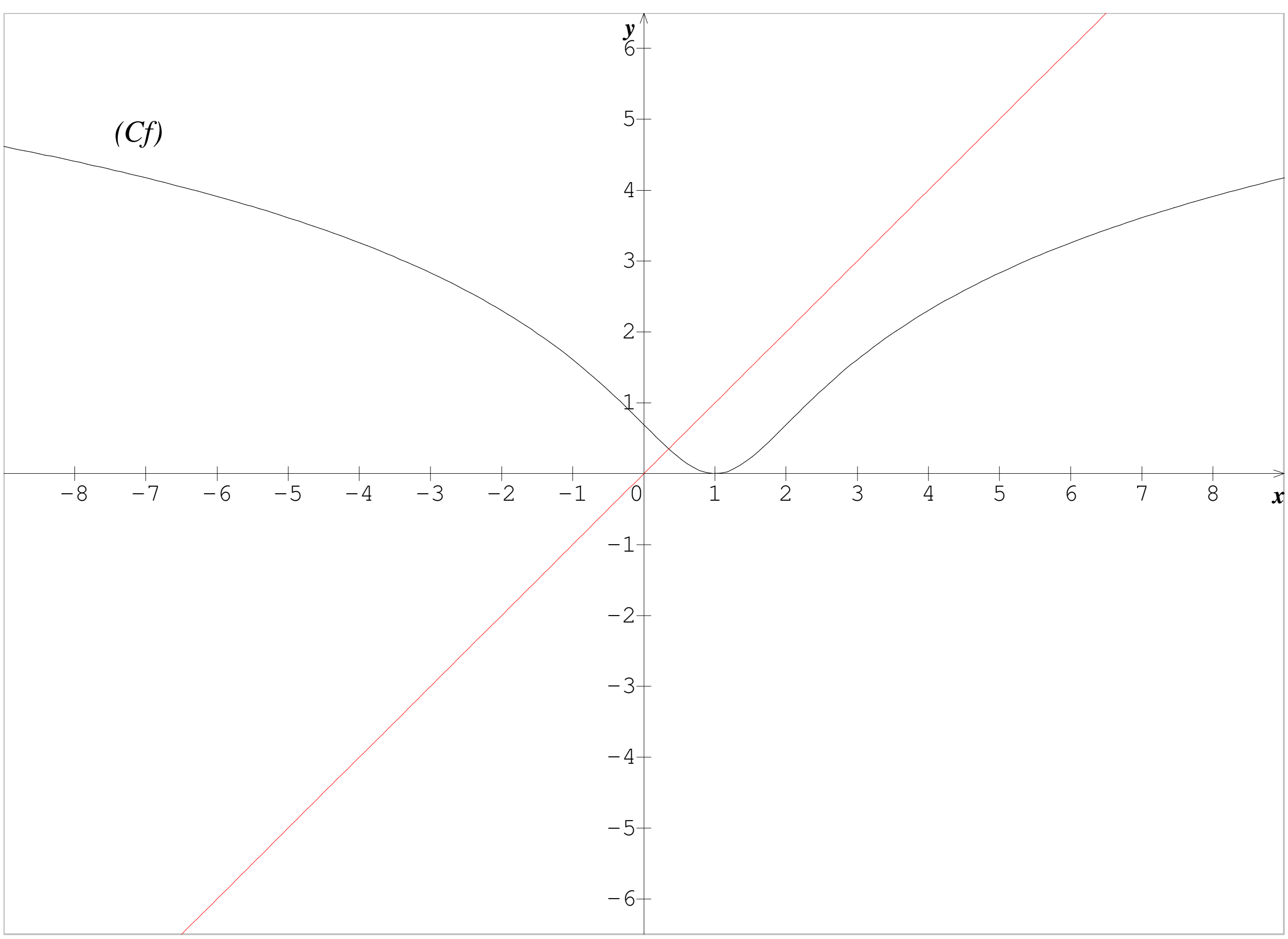
✓ لدينا : $2(1)-x=2-x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(2(1)-x) &= f(2-x) \\ &= \ln\left((2-x)^2-2(2-x)+2\right) \\ &= \ln\left(4-4x+x^2-4+2x+2\right) \\ &= \ln\left(x^2-2x+2\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$ ✓

إذن : $\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R}) & 2(1)-x \in \mathbb{R} \\ (\forall x \in \mathbb{R}) & f(2(1)-x)=f(x) \end{cases}$

و منه $(D): x=1$ هو محور تماثل ل (C_f)

(6



الجزء الثاني :

1) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f'(x)-1\\ &= \frac{2x-2}{x^2-2x+2}-1\\ &= \frac{2x-2-x^2+2x-2}{x^2-2x+2}\\ &= \frac{-x^2+4x-4}{x^2-2x+2}\\ &= \frac{-(x-2)^2}{x^2-2x+2}\end{aligned}$$

لدينا :

$$\begin{cases}\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) \leq 0\\ \varphi'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2\end{cases}$$

إذن : φ تناقصية قطعا .

2) أ-

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(x^2-2x+2\right)-x = +\infty$$

لأن :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(x^2-2x+2\right) = +\infty\\ \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty\end{cases}$$

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}$:

✓

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x)-x \\ &= \ln\left(x^2-2x+2\right)-x \\ &= \ln\left(x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)-x \\ &= \ln\left(x^2\right)+\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)-x \\ &= 2\ln(x)+\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)-x \\ &= x\left(\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x}-1\right)\end{aligned}$$

إذن : لكل $x>0$: $\varphi(x)=x\left[\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x}-1\right]$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x}-1\right]=-\infty$

ج-

✓ φ متصلة على $\mathbb{R}$

✓ φ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

✓ $0\in\varphi(\mathbb{R})=\varphi(]-\infty,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x),\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

إذن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$

إذن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$

و منه $(\Delta): y=x$ يقطع (C_f) في نقطة وحيدة أفصولها α

✓

لدينا :

- φ متصلة على $[0,3;0,4]$
- $\varphi(0,3)\times\varphi(0,4)<0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\varphi(0,3)>0\\ \varphi(0,4)<0\end{cases}$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $0,3<\alpha<0,4$

つづく