الدوال اللوغاريتمية والأسّية

السلسلة 1 (تمرينان ~ 18 صفحة)

التمرين الأول :

الجزء الأول

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-e^{-2x}}{x} & ;x>0 \\ f(0)=2 \end{cases}$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم بين أن : f متصلة على $\mathbb{R}^+$

2) أ. بين أن لكل $t\in\mathbb{R}^+$: $1-2t\le e^{-2t}\le 1$ ، ثم استنتج أن : $2t-2t^2\le 1-e^{-2t}\le 2t$

ب. بين أن لكل $x\in\mathbb{R}^+$: $2x^2-\dfrac{4}{3}x^3\le e^{-2x}+2x-1\le 2x^2$

ج. بين أن f قابلة للإشتقاق في لصفر على اليمين ، و أن : $f'_d(0)=-2$

3) أ. بين أن : $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^2}$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)$ حيث : $\varphi(x)=e^{-2x}(2x+1)-1$

ب. أدرس إشارة الدالة φ على $\mathbb{R}^+$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

الجزء الثاني

لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$

1) أ. بين أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و أن : $F'(x)=2f(2x)-f(x)$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)$

ب. تحقق أن : $F'(x)=f(x)\times e^{-2x}$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)$ ، ثم استنتج منحى تغيرات F على $\mathbb{R}^+$

2) أ. بين أن : $0\le\dfrac{1}{t}-f(t)\le e^{-2t}$ $\left(\forall t\in[1,+\infty[\right)$

ب. استنتج أن : $0\le\ln(2)-F(x)\le\dfrac{1}{2}\left(e^{-2x}-e^{-4x}\right)$ $\left(\forall x\in[1,+\infty[\right)$

ج. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ ، ثم ضع جدول تغيرات F

3) أرسم المنحنى (C_F) في معلم متعامد ممنظم

4) نضع لكل $n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=f(n)+f(n+1)+......+f(2n)$

أ. تحقق أن : $f(k+1+n)\le\int_{k+n}^{k+1+n} f(x)dx\le f(k+n)$ $\left(\forall k\in\{0;1;.......;n-1\}\right)$

ب. استنتج أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $F(n)+f(2n) \leq S_n \leq F(n)+f(n)$

ج. بين أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها

التمرين الثاني :

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بما يلي : $h(1)=1$ و $(\forall x>1);h(x)=\dfrac{x-1}{x\ln x}$

الجزء الأول :

1) أ. بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1

ب. بين أن : $(\forall x>1);\ln x < x-1$ ثم استنتج أن الدالة h تناقصية قطعا على المجال $]1,+\infty[$

2) أ. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h

ب. استنتج أن : $(\forall x\geq 1);0<h(x)\leq 1$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بما يلي : $g(1)=\ln 2$ و $(\forall x>1);g(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ. تحقق أن $(\forall x>1);\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt=\ln 2$

ب. تحقق أن : $(\forall x>1);g(x)-\ln 2=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$

ج. بين أن : $(\forall x>1);g(x)-\ln 2=\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}dt$

2) أ. بين أن : $(\forall x>1);(x-\sqrt{x})h(x)\leq g(x)-\ln 2\leq (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})$

ب. استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

ج. بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$

الجزء الثالث :

I. 1- بين أن الدالة $k:x\mapsto g(x)-x+1$ تقابل من المجال $[1,+\infty[$ نحو المجال $]-\infty,\ln 2]$

2- استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1,+\infty[$ بحيث : $1+g(\alpha)=\alpha$

II. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $1\leq u_0<\alpha$ و $u_{n+1}=1+g(u_n)\quad(\forall n\geq 0)$

1) أ. بين أن : $1\leq u_n<\alpha\quad(\forall n\geq 0)$

ب. بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا .

ج. استنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ **متقاربة و أن :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

2) أ. بين أن : $\left|u_{n+1}-\alpha\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n-\alpha\right| \quad (\forall n\geq 0)$

ب.بين أن : $\left|u_n-\alpha\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|u_0-\alpha\right| \quad (\forall n\geq 0)$

ج. استنتج مرة ثانية أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

تصحيح التمرين الأول

الجزء الأول

(1

✓ $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{x}=0$$

لأن : $$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}1-e^{-2x}=\lim_{t\to-\infty}1-e^{t}=1 & \begin{pmatrix}t=-2x\\ x\to+\infty\\ t\to-\infty\end{pmatrix}\\ \lim_{x\to+\infty}x=+\infty\end{cases}$$

✓ لنبين أن f متصلة على $\mathbb{R}^+$:

- لنبين أولا أن f متصلة على $\mathbb{R}_*^+$
  - $f_1 : x\mapsto 1-e^{-2x}$ متصلة على $\mathbb{R}_*^+$
  - $f_2 : x\mapsto x$ متصلة على $\mathbb{R}_*^+$
  - $\forall x\in\mathbb{R}_*^+\quad f_2(x)\neq 0$

  إذن : $f=\dfrac{f_1}{f_2}$ متصلة على $\mathbb{R}_*^+$
- ثانيا لندرس اتصال f في الصفر على اليمين

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{-2x}}{x}=\lim_{x\to0^+}2\times\frac{e^{-2x}-1}{-2x}=2$$

لأن : $$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-2x}-1}{-2x}=\lim_{h\to0^-}\frac{e^{h}-1}{h}=1\quad\begin{pmatrix}h=-2x\\ x\to0^+\\ h\to0^-\end{pmatrix}$$

بما أن $\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)$ فإن f في الصفر على اليمين

خلاصة : f متصلة على $\mathbb{R}^+$

(2 أ-

❖ ليكن $t\in\mathbb{R}^+$:

✓ نعتبر الدالة $U:t\mapsto e^{-2t}-1+2t$

لدينا : $U'(t)=-2e^{-2t}+2=2\left(-e^{-2t}+1\right)$

t	$0 \qquad +\infty$
$U'(t)$	$0 \quad +$
$U(t)$	$0 \nearrow +\infty$

لدينا الدالة U تزايدية على $\mathbb{R}^+$ إذن $U(0) \le U(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$

إذن $0 \le e^{-2t} - 1 + 2t \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$

و منه $1 - 2t \le e^{-2t} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$

✓ و لدينا : $t \ge 0$ إذن $-2t \le 0$ إذن $e^{-2t} \le e^0$

و منه $e^{-2t} \le 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$

❖ ليكن $t \in \mathbb{R}^+$ و $0 \le x \le t$

حسب ما سبق لدينا : $1 - 2x \le e^{-2x} \le 1$

إذن : $\int_0^t (1-2x)dx \le \int_0^t e^{-2x}dx \le \int_0^t 1dx$

إذن : $\left[x - x^2\right]_0^t \le \left[\frac{-1}{2}e^{-2x}\right]_0^t \le \left[x\right]_0^t$

إذن : $t - t^2 \le \frac{-1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \le t$

و منه : $2t - 2t^2 \le 1 - e^{-2t} \le 2t$ لكل $t \in \mathbb{R}^+$

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}^+$ و $0 \le t \le x$

حسب نتيجة السؤال 2)أ- لدينا : $2t - 2t^2 \le 1 - e^{-2t} \le 2t$

إذن : $\int_0^x \left(2t - 2t^2\right)dt \le \int_0^x \left(1 - e^{-2t}\right)dt \le \int_0^x 2tdt$

إذن : $\left[t^2 - \frac{2t^3}{3}\right]_0^x \le \left[t + \frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x \le \left[t^2\right]_0^x$

إذن : $x^2 - \frac{2x^3}{3} \le x + \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{2} \le x^2$

و منه : لكل $x \in \mathbb{R}^+$: $2x^2 - \frac{4}{3}x^3 \le e^{-2x} + 2x - 1 \le 2x^2$

ج-

✓ لندرس قابلية اشتقاق f في الصفر على اليمين

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1-e^{-2x}}{x}-2}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{-2x}-2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}-\frac{e^{-2x}+2x-1}{x^2}$$

$$=-2$$

لأن : لدينا لكل $x\in\mathbb{R}_*^+$: $2x^2-\frac{4}{3}x^3\le e^{-2x}+2x-1\le 2x^2$

إذن : لكل $x\in\mathbb{R}_*^+$: $2-\frac{4}{3}x\le\frac{e^{-2x}+2x-1}{x^2}\le 2$

و بما أن $\lim_{x\to0^+}2-\frac{4}{3}x=2$ فإن : حسب مبرهنة الدرك : $\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-2x}+2x-1}{x^2}=2$

✓ إذن f قابلة للإشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا : $f_d'(0)=-2$

3) أ-

✓ لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_*^+$ (كخارج دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}_*^+$)

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}_*^+$:

$$f'(x)=\left(\frac{1-e^{-2x}}{x}\right)'$$

$$=\frac{\left(1-e^{-2x}\right)'\times x-\left(1-e^{-2x}\right)\times(x)'}{x^2}$$

$$=\frac{2e^{-2x}\times x-1+e^{-2x}}{x^2}$$

$$=\frac{e^{-2x}(2x+1)-1}{x^2}$$

$$=\frac{\varphi(x)}{x^2}$$

حيث : $\varphi(x)=e^{-2x}(2x+1)-1$

ب- لندرس إشارة φ على $\mathbb{R}^+$:

ليكن $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \left(e^{-2x}(2x+1)-1\right)' \\ &= \left(e^{-2x}\right)'(2x+1)+\left(e^{-2x}\right)(2x+1)'+0 \\ &= -2e^{-2x}(2x+1)+2e^{-2x} \\ &= 2e^{-2x}(-2x-1+1) = -2xe^{-2x}\end{aligned}$$

لدينا : لكل $x \in \mathbb{R}^+$ $\quad \varphi'(x) \le 0$

x	$0 \qquad +\infty$
$\phi'(x)$	$0 \qquad -$
$\phi(x)$	$0 \searrow -1$

لدينا $x \ge 0$ و φ تناقصية

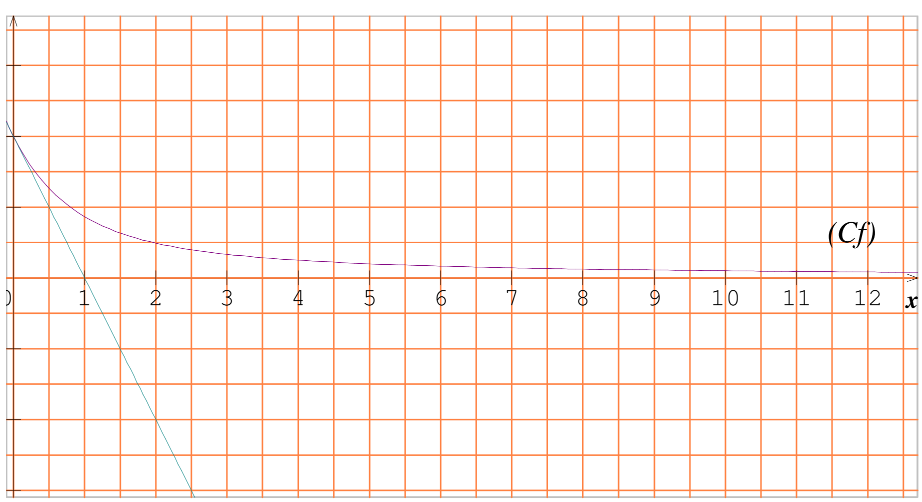
إذن : $\varphi(x) \le \varphi(0)$ و منه $\varphi(x) \le 0$

و بالتالي : لكل $x \in \mathbb{R}_*^+$ $\quad f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2} < 0$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$0 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$2 \searrow 0$

(4



الجزء الثاني

لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$

1) أ- لدينا :

✓ f متصلة على المجال $[0,+\infty[$

✓ $U_1 : x \mapsto x$ و $U_2 : x \mapsto 2x$ قابلتين للإشتقاق على $[0,+\infty[$

✓ $U_1([0,+\infty[) \subseteq [0,+\infty[$ و $U_2([0,+\infty[) \subseteq [0,+\infty[$

إذن F قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$

ليكن $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\int_x^{2x} f(t)dt\right)' \\ &= (2x)'f(2x)-(x)'f(x) \\ &= 2f(2x)-f(x) \end{aligned}$$

إذن لكل $x \in \mathbb{R}^+$ $F'(x)=2f(2x)-f(x)$

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2f(2x)-f(x) \\ &= 2\times\frac{1-e^{-4x}}{2x}-\frac{1-e^{-2x}}{x} \\ &= \frac{1-e^{-4x}-1+e^{-2x}}{x} \\ &= e^{-2x}\times\frac{1-e^{-2x}}{x} \\ &= e^{-2x}\times f(x) \end{aligned}$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) \quad F'(x)=f(x)\times e^{-2x}$

بما أن $0<f(x)$ و $0<e^{-2x}$ فإن $0<F'(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+)$

و بالتالي الدالة F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$

2) أ- لنبين أن $(\forall t \in [1,+\infty[) \quad 0 \le \frac{1}{t}-f(t) \le e^{-2t}$

ليكن $t \in [1,+\infty[$:

✓ $\frac{1}{t}-f(t)=\frac{1}{t}-\frac{1-e^{-2t}}{t}=\frac{e^{-2t}}{t} \ge 0$

✓ لدينا $t \ge 1$

إذن : $\frac{1}{t} \leq 1$

إذن : $\frac{e^{-2t}}{t} \leq e^{-2t}$ و منه : $\frac{1}{t} - f(t) \leq e^{-2t}$

و بالتالي : $\left(\forall t \in [1,+\infty[\right) \quad 0 \leq \frac{1}{t} - f(t) \leq e^{-2t}$

ب- ليكن $x \in [1,+\infty[$:

لدينا : $0 \leq \frac{1}{t} - f(t) \leq e^{-2t}$

إذن : $0 \leq \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} - f(t)\right) dt \leq \int_x^{2x} e^{-2t} dt$

إذن : $0 \leq [\ln t]_x^{2x} - F(x) \leq \frac{-1}{2}\left[e^{-2t}\right]_x^{2x}$

و منه : $\left(\forall x \in [1,+\infty[\right) \quad 0 \leq \ln(2) - F(x) \leq \frac{1}{2}\left(e^{-2x} - e^{-4x}\right)$

ج- لدينا $\left(\forall x \in [1,+\infty[\right) \quad 0 \leq \ln(2) - F(x) \leq \frac{1}{2}\left(e^{-2x} - e^{-4x}\right)$

و $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\left(e^{-2x} - e^{-4x}\right) = 0$

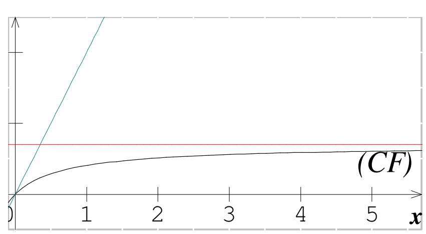
إذن حسب مبرهنة الدرك : $\lim_{x \to +\infty} \left(\ln 2 - F(x)\right) = 0$

و منه : $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \ln 2$

جدول تغيرات الدالة F :

x	$0 \qquad +\infty$
$F'(x)$	$+$
$F(x)$	$0 \nearrow ln2$

3)



4) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=f(n)+f(n+1)+......+f(2n)$

أ- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و $k\in\mathbb{N}$ و $0\le k\le n-1$ و $k+n\le x\le k+n+1$

لدينا f تناقصية

إذن : $f(k+n+1)\le f(x)\le f(k+n)$

إذن : $\int_{k+n}^{k+n+1}f(k+n+1)dx\le\int_{k+n}^{k+n+1}f(x)dx\le\int_{k+n}^{k+n+1}f(k+n)dx$

إذن : $f(k+n+1).\int_{k+n}^{k+n+1}1dx\le\int_{k+n}^{k+n+1}f(x)dx\le f(k+n).\int_{k+n}^{k+n+1}1dx$

إذن : $f(k+n+1).[x]_{k+n}^{k+n+1}\le\int_{k+n}^{k+n+1}f(x)dx\le f(k+n).[x]_{k+n}^{k+n+1}$

و منه : $f(k+1+n)\le\int_{k+n}^{k+1+n}f(x)dx\le f(k+n)$ $\left(\forall k\in\{0;1;.......;n-1\}\right)$

ب- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$: لدينا حسب نتيجة السؤال 4)أ- :

$$\left(\forall k\in\{0;1;.......;n-1\}\right)\quad f(k+1+n)\le\int_{k+n}^{k+1+n}f(x)dx\le f(k+n)$$

إذن : $\sum_{k=0}^{k=n-1}f(k+1+n)\le\sum_{k=0}^{k=n-1}\int_{k+n}^{k+1+n}f(x)dx\le\sum_{k=0}^{k=n-1}f(k+n)$

إذن : $S_n-f(n)\le\sum_{k=n}^{k=2n}\int_{k}^{k+1}f(x)dx\le S_n-f(2n)$

إذن : $S_n-f(n)\le\int_{n}^{2n}f(x)dx\le S_n-f(2n)$

إذن : $S_n-f(n)\le F(n)\le S_n-f(2n)$

إذن : $F(n)+f(2n)\le S_n$ و $S_n\le F(n)+f(n)$

و منه : لكل $n\in\mathbb{N}^*$: $F(n)+f(2n)\le S_n\le F(n)+f(n)$

ج- لدينا حسب نتيجة السؤال 4) ب- : $F(n)+f(2n)\le S_n\le F(n)+f(n)$

و لدينا : $\lim_{n\to+\infty}F(n)+f(n)=\ln 2$ و $\lim_{n\to+\infty}F(n)+f(2n)=\ln 2$

إذن حسب مبرهنة الدرك : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و $\lim_{n\to+\infty}S_n=\ln 2$

تصحيح التمرين الثاني

الجزء الأول :

1) أ- لنبين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1:

لدينا : $h(1)=1$

ولدينا : $$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} h(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x-1}{x\ln x}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x}\times\frac{1}{\frac{\ln x}{x-1}}=1$$

لأن : $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x=1$ و $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\ln x}{x-1}=1$

بما أن : $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} h(x)=h(1)$ فإن الدالة h متصلة على اليمين في 1

ب-

✓ نعتبر الدالة المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بما يلي : $U : t\mapsto \ln(t)-t+1$

لدينا : $U'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}$

t	1 $\quad$ $+\infty$
$U'(t)$	0 $\quad -$
$U(t)$	$0 \searrow -\infty$

لدينا : $t\geq 1$ و U تناقصية على المجال $[1,+\infty[$

إذن : $(\forall t\in[1,+\infty[)\quad U(t)\leq U(1)$

إذن : $(\forall t\in]1,+\infty[)\quad U(t)<U(1)$

إذن : $(\forall t\in]1,+\infty[)\quad \ln(t)-t+1<0$

و منه : $(\forall t\in]1,+\infty[)\quad \ln(t)<t-1$

✓ ليكن $x\in]1,+\infty[$:

$$\begin{aligned}h'(x) &= \left(\frac{x-1}{x\ln x}\right)'\\ &= \frac{(x-1)'x\ln x-(x-1)(x\ln x)'}{(x\ln x)^2}\\ &= \frac{x\ln(x)-(x-1)(\ln(x)+1)}{(x\ln x)^2}\\ &= \frac{x\ln x-x\ln x-x+\ln x+1}{(x\ln x)^2}\\ &= \frac{\ln x-x+1}{(x\ln x)^2}\end{aligned}$$

لدينا : $(\forall x\in]1,+\infty[)\quad \ln(x)-x+1<0$ و $(\forall x\in]1,+\infty[)\quad (x\ln(x))^2>0$

إذن : $(\forall x\in]1,+\infty[)\quad h'(x)<0$

ومنه الدالة h تناقصية قطعا على المجال $]1,+\infty[$

2) أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}\times\frac{1}{\ln x}=0$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x)}=0$

جدول تغيرات الدالة h :

x	$1 \qquad +\infty$
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	$1 \searrow 0$

ب- لدينا : $h([1,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),h(1)\right]=]0,1]$

إذن : $(\forall x\in[1,+\infty[)\quad 0<h(x)\leq 1$

الجزء الثاني :

1) أ- ليكن $1 < x$:

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \int_x^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln t}dt$$
$$= \int_x^{x^2} \frac{\ln'(t)}{\ln t}dt$$
$$= \left[\ln|\ln t|\right]_x^{x^2}$$
$$= \ln\left(\ln\left(x^2\right)\right) - \ln\left(\ln\left(x\right)\right)$$
$$= \ln\left(2\ln\left(x\right)\right) - \ln\left(\ln\left(x\right)\right)$$
$$= \ln\left(\frac{2\ln x}{\ln x}\right)$$
$$= \ln\left(2\right)$$

ب- ليكن $1 < x$: لدينا :

$$g\left(x\right) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt$$
$$= \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}\ln t} - \frac{1}{t\ln t}\right)dt$$
$$= \int_x^{x^2} \left(\frac{\sqrt{t}}{t\ln t} - \frac{1}{t\ln t}\right)dt$$
$$= \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$$

و منه : $(\forall x > 1); g\left(x\right) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$

ج- لدينا : $(\forall x > 1); g\left(x\right) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$

نضع $u = \sqrt{t}$

لدينا : $\begin{pmatrix} t = x \rightarrow u = \sqrt{x} \\ t = x^2 \rightarrow u = x \end{pmatrix}$

و $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2u}$ إذن : $dt = 2udu$

$$\begin{aligned} g(x)-\ln 2 &= \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{u-1}{u^2 \ln(u^2)}.2udu \\ &= \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{u-1}{u^2.2\ln(u)}.2udu \\ &= \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{u-1}{u\ln(u)}du \\ &= \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{t-1}{t\ln(t)}dt \end{aligned}$$

2) **أ-** لدينا : $(\forall x>1); g(x)-\ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}dt = \int_{\sqrt{x}}^{x} h(t)dt$

ليكن $x>1$ و $\sqrt{x} \le t \le x$

لدينا : الدالة تناقصية قطعا على المجال $]1,+\infty[$

إذن : $h(x) \le h(t) \le h(\sqrt{x})$

إذن : $\int_{\sqrt{x}}^{x} h(x)dt \le \int_{\sqrt{x}}^{x} h(t)dt \le \int_{\sqrt{x}}^{x} h(\sqrt{x})dt$

إذن : $h(x)\int_{\sqrt{x}}^{x} dt \le \int_{\sqrt{x}}^{x} h(t)dt \le h(\sqrt{x})\int_{\sqrt{x}}^{x} dt$

و منه : $(\forall x>1);(x-\sqrt{x})h(x) \le g(x)-\ln 2 \le (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})$

ب- لندرس قابلية اشتقاق g على اليمين في 1 :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{g(x)-\ln 2}{x-1}$$

لدينا : $(\forall x>1);(x-\sqrt{x})h(x) \le g(x)-\ln 2 \le (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})$

إذن : $(\forall x>1);\frac{(x-\sqrt{x})}{x-1}h(x) \le \frac{g(x)-\ln 2}{x-1} \le \frac{(x-\sqrt{x})}{x-1}h(\sqrt{x})$

إذن : $(\forall x>1);\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}h(x) \le \frac{g(x)-\ln 2}{x-1} \le \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}h(\sqrt{x})$

لدينا : $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}h(x) = \frac{1}{2}$ و $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}h(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$

إذن حسب مبرهنة الدرك : $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$

و منه الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 و لدينا : $g'_d(1)=\frac{1}{2}$

ج-

✓ لدينا : $(\forall x>1);\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)-\ln 2$

إذن : $(\forall x>1);\ln 2+\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)$

إذن : $(\forall x>1);\ln 2+\left(x-\sqrt{x}\right)\frac{x-1}{x\ln x}\le g(x)$

إذن : $(\forall x>1);\ln 2+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{1-\frac{1}{x}}{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}\le g(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln 2+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{1-\frac{1}{x}}{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

✓ لدينا : $(\forall x>1);\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)-\ln 2\le\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)$

إذن : $(\forall x>1);\left(x-\sqrt{x}\right)\frac{x-1}{x\ln x}\le g(x)-\ln 2\le\left(x-\sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)}$

إذن : $(\forall x>1);\frac{\ln 2}{x}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{x-1}{x}\times\frac{1}{\ln x}\le\frac{g(x)}{x}\le\frac{\ln 2}{x}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{1}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln 2}{x}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{x-1}{x}\times\frac{1}{\ln x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln 2}{x}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{1}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}=0$

إذن حسب مبرهنة الدرك : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$

الجزء الثالث :

I■

1) نعتبر الدالة $k:x\mapsto g(x)-x+1$

✓ k متصلة على المجال $]1,+\infty[$

✓

$$\begin{aligned}k'(x) &= g'(x)-1\\&=\left(\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}dt\right)'-1\\&=\left(x^2\right)'\times\frac{1}{\sqrt{x^2}\ln\left(x^2\right)}-\left(x\right)'\times\frac{1}{\sqrt{x}\ln\left(x\right)}-1\\&=2x\times\frac{1}{2x\ln x}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}-1\\&=\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}-1\\&=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln x}-1\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)}-1\\&=\frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)-1\end{aligned}$$

لدينا : $0<h\left(\sqrt{x}\right)\leq 1$

إذن : $0<\frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)\leq\frac{1}{2}$

إذن : $\frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)-1\leq\frac{-1}{2}<0$

و منه : $k'(x)<0$

و بالتالي k تناقصية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

- بما أن k متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[1,+\infty[$ فإن k تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $k\left([1,+\infty[\right)$

بحيث : $k\left([1,+\infty[\right)=\left]\lim_{x\to+\infty}k(x),k(1)\right]=\left]-\infty,\ln 2\right]$

2) لدينا : k تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $k\left([1,+\infty[\right)=\left]-\infty,\ln 2\right]$

و بما أن $0\in k\left([1,+\infty[\right)=\left]-\infty,\ln 2\right]$ فإنه يوجد α وحيد بحيث : $k(\alpha)=0$

إذن يوجد α وحيد بحيث : $g(\alpha)-\alpha+1=0$

و منه يوجد α وحيد بحيث : $1+g(\alpha)=\alpha$

II. لدينا : $1\leq u_0<\alpha$ و $u_{n+1}=1+g(u_n)\quad(\forall n\geq 0)$

1) **أ-** لنبين بالترجع أن : $1\leq u_n<\alpha\quad(\forall n\geq 0)$

- ✓ من أجل $n=0$: لدينا : $1\leq u_0<\alpha$
- ✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

- نفترض أن $1 \le u_n < \alpha$
- و نبين أن $1 \le u_{n+1} < \alpha$

لدينا g تزايدية قطعا و حسب الإفتراض $1 \le u_n < \alpha$

إذن : $g(1) \le g(u_n) < g(\alpha)$

إذن : $1+g(1) \le 1+g(u_n) < 1+g(\alpha)$

إذن : $1 \le 1+\ln 2 \le u_{n+1} < \alpha$

✓ نستنتج : $(\forall n \ge 0) \quad 1 \le u_n < \alpha$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1}-u_n = 1+g(u_n)-u_n = k(u_n)$$

لدينا حسب نتيجة لسؤال السابق $1 \le u_n < \alpha$ و الدالة k تناقصية قطعا

إذن $k(\alpha) < k(u_n) \le k(1)$

إذن : $0 < k(u_n)$ (لأن $k(\alpha)=0$)

إذن $0 < u_{n+1}-u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ تزايدية قطعا

ج-

✓ بما أن $(u_n)_{n\ge 0}$ تزايدية و مكبورة فإنها متقاربة

✓ نعتبر الدالة $\varphi : x \mapsto 1+g(x)$ ($\varphi'(x)=g'(x)>0$)

لدينا : $\begin{cases} u_0 \in [1,\alpha] \\ u_{n+1}=\varphi(u_n) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

- φ متصلة على المجال $[1,\alpha]$
- $\varphi([1,\alpha]) = [\varphi(1),\varphi(\alpha)] = [1+\ln 2,\alpha] \subset [1,\alpha]$
- $(u_n)_{n\ge 0}$ متقاربة

إذن نهاية $(u_n)_{n\ge 0}$ هي حل للمعادلة $\varphi(x)=x$

$$\begin{aligned} \varphi(x)=x &\Leftrightarrow 1+g(x)=x \\ &\Leftrightarrow x=\alpha \end{aligned}$$

و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

2) أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$

✓ φ متصلة على المجال $[u_n,\alpha]$

✓ φ قابلة للإشتقاق على المجال $]u_n,\alpha[$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد c_n من $]u_n,\alpha[$ بحيث :

$$\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)=\varphi'(c_n).(u_n-\alpha)$$

إذن : $\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)=g'(c_n).(u_n-\alpha)$

إذن : $|\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)|=|g'(c_n)|.|u_n-\alpha|$

إذن : $|u_{n+1}-\alpha|=|g'(c_n)|.|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2}.|u_n-\alpha|$

و منه : $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha| \quad (\forall n\geq 0)$

ب-

✓ من أجل $n=0$: لدينا $|u_0-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^0.|u_0-\alpha|$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$:

- نفترض أن $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$
- و نبين أن $|u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$

لدينا حسب نتيجة السؤال السابق : $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha| \quad (a)$

و حسب الإفتراض $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$

إذن : $\frac{1}{2}|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha| \quad (b)$

من (a) و (b) نستنتج : $|u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$

✓ نستنتج : $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha| \quad (\forall n\geq 0)$

ج- لدينا حسب نتيجة السؤال السابق : $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha| \quad (\forall n\geq 0)$

و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|=0$ (لأن : $-1<\frac{1}{2}<1$)

إذن $\lim_{n\to+\infty}|u_n-\alpha|=0$ و منه : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.

つづく