حساب التكامل

السلسلة 1 (14 تمرين)

التمرين 1:

أحسب التكاملات التالية :

(1 $I=\int_0^1\left(x^2-x+1\right)dx$

(2 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x\right)dx$

(3 $K=\int_0^{\ln 2}e^x dx$

(4 $L=\int_1^2\frac{1}{x+1}dx$

(5 $M=\int_0^4\sqrt{x+3}dx$

(6 $N=\int_0^1 x\left(x^2-1\right)^4 dx$

التمرين 2:

أحسب التكاملات التالية :

(1 $I=\int_0^2\left|x-1\right|dx$

(2 $J=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\left|\ln x\right|}{x}dx$

التمرين 3:

(1 **أحسب القيمة المتوسطة ل** $f\left(x\right)=\cos 2x$ **على** $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

(2 **أدرس إشارة التكاملات التالية :**

أ. $I=\int_1^2\frac{x^4}{1+x^2}dx$

ب. $J=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,dx$

التمرين 4:

أحسب التكاملات التالية :

(1 $I=\int_0^1 x\left(x^2+3\right)^2 dx$

(2 $J=\int_0^1\frac{x-1}{\left(x^2-2x+3\right)^2}dx$

(3 $K=\int_0^2\frac{2}{x+1}dx$

4) $L=\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx$

5) $M=\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}dx$

التمرين 5:

باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب التكاملات التالية :

1) $\int_1^e x\ln x dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

3) $\int_1^e \ln x dx$

4) $\int_0^1 \ln(x+1)dx$

5) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

6) **باستعمال مكاملة بالأجزاء مرتين أحسب :** $\int_0^1 x^2e^x dx$

التمرين 6:

1) $f(x)=\frac{2}{x}$

أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين مهادلتاهما على التوالي: $x=1$ **و** $x=4$

2) **في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث :** $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

نعتبر الدالة $f:x\mapsto 1-e^x$ **. أحسب مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي** $x=\ln 2$ **و** $x=\ln 4$

3) **المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث :** $\|\vec{i}\|=1cm$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2-2x$

أحسب مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين مهادلتاهما على التوالي:

$x=1$ **و** $x=3$

4) **المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث :** $\|\vec{i}\|=3cm$ **و** $\|\vec{j}\|=2cm$

نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بما يلي : $f(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}+e^{-x}$ **و** $g(x)=e^{-x}$

أحسب ب cm^2 **مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنيي الدالتين f و g و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي**

$x=0$ **و** $x=\ln 2$

التمرين 7:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\sqrt{x\left(e^{x}-1\right)}$

أحسب V حجم المجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل على المجال $[0,1]$.

التمرين 8:

أحسب التكاملات التالية :

1) $\int_{1}^{2}\left(x^{4}-\frac{1}{4}x^{3}+2x-5-\frac{1}{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$

2) $\int_{0}^{1}3x\left(x^{2}-1\right)^{4}dx$

3) $\int_{0}^{1}\frac{x^{2}}{\sqrt{x^{3}+1}}dx$

4) $\int_{0}^{1}\frac{x^{5}}{\sqrt[3]{x^{6}+1}}dx$

5) $\int_{1}^{e}\frac{\ln^{2}(x)}{x}dx$

6) $\int_{2}^{3}\frac{x^{3}}{\left(x^{4}-1\right)^{2}}dx$

7) $\int_{1}^{4}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

8) $\int_{0}^{1}\frac{x+2}{x^{2}+4x+3}dx$

التمرين 9:

باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب التكاملات التالية :

1) $\int_{0}^{1}(x+2)e^{-x}dx$

2) $\int_{0}^{1}x\ln(x+3)dx$

3) أ. تحقق أن لكل x من $\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$ لدينا : $\frac{1}{x\left(x^{2}-1\right)}=\frac{-1}{x}+\frac{x}{x^{2}-1}$

ب. أحسب $\int_{2}^{3}\frac{1}{x\left(x^{2}-1\right)}dx$

ج. باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب التكامل : $\int_2^3 \frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}\ln\left(x\right)dx$

التمرين 10:

1) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب التكامل : $\int_0^1 xe^x dx$

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب التكامل : $\int_0^1 x^2e^x dx$

3) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f\left(x\right)=\left(x^2+4x+4\right)e^x$

أحسب مساحة الحيز المحصور بين $\left(C_f\right)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$

$\left(\left\|\vec{i}\right\|=1,5cm;\left\|\vec{j}\right\|=2cm\right)$

التمرين 11:

1) تحقق أن الدالة $F:x\mapsto\frac{-\ln x}{x}-\frac{1}{x}$ دالة أصلية للدالة $f:x\mapsto\frac{\ln x}{x^2}$ على $\left]0,+\infty\right[$

2) أحسب التكامل $\int_1^4\frac{\ln x}{x^2}dx$

التمرين 12:

1) بين أن الدالة $H:x\mapsto x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto\ln x$ على $\left]0,+\infty\right[$

2) أحسب : $\int_1^2 h\left(x\right)dx$

3) في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$

أحسب مساحة الحيز المحصور بين $\left(C_h\right)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$

التمرين 13 :

أحسب التكامل :

$\int_2^4\left|\ln\left(x\right)-1\right|dx$

التمرين 14 :

1) أحسب التكاملات التالية :

$$A=\int_1^2\left(x^3-2x+3\right)dx$$

$$B=\int_0^1 x\left(x^2+1\right)^2dx$$

$$C=\int_0^2\frac{1}{x+1}dx$$

2) أحسب التكامل : $D=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\left|\ln x\right|}{x}dx$

3) أ- تحقق أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right):\frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$

ب- أحسب $E=\int_0^2\frac{x^2}{x+1}dx$

ج- باستعمال مكاملة بالأجزاء استنتج قيمة التكامل : $F=\int_0^2 x\ln\left(x+1\right)dx$

تصحيح التمرين 1:

(1

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(x^2 - x + 1\right) dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} + 0\right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

(2

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\, dx \\
&= \left[\frac{-1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\frac{-1}{2}\cos(\pi)\right) - \left(\frac{-1}{2}\cos(0)\right) \\
&= \left(\frac{-1}{2}(-1)\right) - \left(\frac{-1}{2}(1)\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(3

$$
\begin{aligned}
K &= \int_0^{\ln(2)} e^x\, dx \\
&= \left[e^x\right]_0^{\ln(2)} \\
&= \left(e^{\ln(2)}\right) - \left(e^0\right) \\
&= (2) - (1) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(4

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \frac{1}{x+1}dx \\ &= \int_1^2 \frac{(x+1)'}{x+1}dx \\ &= \left[\ln|x+1|\right]_1^2 \\ &= (\ln(3))-(\ln(2)) \\ &= \ln\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

(5

$$\begin{aligned} M &= \int_0^4 \sqrt{x+3}dx \\ &= \int_0^4 (x+3)^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \int_0^4 (x+3)'(x+3)^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \left[\frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 \\ &= \left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 \\ &= \left(\frac{2}{3}(7)^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{2}{3}(3)^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(7\sqrt{7}-3\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

(6

$$\begin{aligned}
N &= \int_0^1 x\left(x^2-1\right)^4 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (2x)\left(x^2-1\right)^4 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2-1\right)'\left(x^2-1\right)^4 dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2-1\right)^5}{5}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{0^5}{5}-\frac{(-1)^5}{5}\right) \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

تصحيح التمرين 2:

(1

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 |x-1| dx \\
&= \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^2 |x-1| dx \\
&= \int_0^1 (-x+1) dx + \int_1^2 (x-1) dx \\
&= \left[\frac{-x^2}{2}+x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2 \\
&= =\left(\left(\frac{1}{2}\right)-(0)\right)+\left((0)-\left(\frac{-1}{2}\right)\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

(2

x	0		1		$+\infty$
$ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$$\begin{aligned}
J &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\left|\ln x\right|}{x} dx \\
&= \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\left|\ln x\right|}{x} dx + \int_{1}^{e} \frac{\left|\ln x\right|}{x} dx \\
&= \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{-\ln x}{x} dx + \int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x} dx \\
&= -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x} \ln x dx + \int_{1}^{e} \frac{1}{x} \ln x dx \\
&= -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln'(x) \ln x dx + \int_{1}^{e} \ln'(x) \ln x dx \\
&= -\left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_{1}^{e} + \\
&= -\left((0) - \frac{(-1)^2}{2}\right) + \left(\frac{\ln^2(2)}{2} - (0)\right) \\
&= \frac{1 + \ln^2(2)}{2}
\end{aligned}$$

تصحيح التمرين 3:

(1

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{\frac{\pi}{4} - 0} \int_{0}^{\frac{\pi}{1}} \cos(2x) dx \\
&= \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin(2x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin(0)\right) \\
&= \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2} - 0\right) \\
&= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

2) أ. بما أن $x \mapsto \dfrac{x^4}{1+x^2}$ متصلة و موجبة على $[1,2]$ (و $1<2$) فإن $\int_1^2 \dfrac{x^4}{1+x^2}dx \geq 0$

ب. بما أن $x \mapsto \ln(x)$ متصلة و سالبة على $\left[\dfrac{1}{e},1\right]$ (و $\dfrac{1}{e}<1$) فإن $\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln(x)dx \leq 0$

تصحيح التمرين 4 :

1)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x\left(x^2+3\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (2x)\left(x^2+3\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2+3\right)'\left(x^2+3\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+3\right)^3}{3}\right]_0^1 \\ &= =\frac{1}{2}\left(\frac{64}{3}-\frac{27}{3}\right) \\ &= \frac{37}{6} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{x-1}{\left(x^2-2x+3\right)^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-2}{\left(x^2-2x+3\right)^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(x^2-2x+3\right)'}{\left(x^2-2x+3\right)^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x^2-2x+3}\right]_0^1 \\ &= =\frac{1}{2}\left(\left(\frac{-1}{2}\right)-\left(\frac{-1}{3}\right)\right) \\ &= \frac{-1}{12} \end{aligned}$$

(3

$$\begin{aligned} K &= \int_0^2 \frac{2}{x+1}dx \\ &= 2\int_0^2 \frac{1}{x+1}dx \\ &= 2\int_0^2 \frac{(x+1)'}{x+1}dx \\ &= 2\left[\ln|x+1|\right]_0^2 \\ &= =2\left(\left(\ln(3)\right)-\left(\ln(1)\right)\right) \\ &= 2\ln(3) \end{aligned}$$

(4

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \frac{x}{x+1}dx \\ &= \int_1^2 \frac{x+1-1}{x+1}dx \\ &= \int_1^2 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \int_1^2 \left(1-\frac{(x+1)'}{x+1}\right)dx \\ &= \left[x-\ln|x+1|\right]_1^2 \\ &= \left(2-\ln(3)\right)-\left(1-\ln(2)\right) \\ &= 1+\ln(2)-\ln(3) \\ &= 1+\ln\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

(5

$$\begin{aligned} M &= \int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}dx \\ &= \int_1^e \frac{1}{x}\ln^2(x)dx \\ &= \int_1^e \ln'(x)\ln^2(x)dx \\ &= \left[\frac{\ln^3(x)}{3}\right]_1^e \\ &= \frac{\ln^3(e)}{3}-\frac{\ln^3(1)}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

تصحيح التمرين 5 :

1) لنحسب $\int_1^e x\ln x dx$.

$$\begin{cases} U'(x)=x \\ V(x)=\ln(x) \end{cases} \quad \nearrow\!\!\swarrow \quad \begin{cases} U(x)=\dfrac{x^2}{2} \\ V'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases} \updownarrow$$

$$\begin{aligned}
\int_1^e x\ln x dx &= \int_1^e U'(x)V(x)dx \\
&= \left[U(x)V(x)\right]_1^e - \int_1^e U(x)V'(x)dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\
&= \left(\frac{e^2}{2}\ln(e)-\frac{1^2}{2}\ln(1)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right) \\
&= \frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4} \\
&= \frac{e^2+1}{4}
\end{aligned}$$

2) لنحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.

$$\begin{cases} U'(x)=\cos x \\ V(x)=x \end{cases} \quad \nearrow\!\!\swarrow \quad \begin{cases} U(x)=\sin x \\ V'(x)=1 \end{cases} \updownarrow$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx &= [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\
&= [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)-(0)\right)-((0)-(-1)) \\
&= \frac{\pi}{2}-1
\end{aligned}$$

3) لنحسب $\int_1^e \ln x dx$.

لدينا : $\int_1^e \ln x dx = \int_1^e 1\times\ln(x)dx$

$$\begin{cases} U'(x)=1 \\ V(x)=\ln x \end{cases} \quad \begin{cases} U(x)=x \\ V'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x dx &= [x\ln x]_1^e - \int_1^e x\times\frac{1}{x}dx \\ &= [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1dx \\ &= [x\ln x]_1^e - [x]_1^e \\ &= (e-0)-(e-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

4) لنحسب $\int_0^1 \ln(x+1)dx$.

لدينا : $\int_0^1 \ln(x+1)dx = \int_0^1 1\times\ln(x+1)dx$

$$\begin{cases} U'(x)=1 \\ V(x)=\ln(x+1) \end{cases} \quad \begin{cases} U(x)=x+1 \\ V'(x)=\dfrac{(x+1)'}{x+1}=\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x+1)dx &= \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 (x+1)\times\frac{1}{x+1}dx \\ &= \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 1dx \\ &= \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^1 - [x]_0^1 \\ &= (2\ln(2)-0)-(1-0) \\ &= 2\ln(2)-1\end{aligned}$$

5) لنحسب $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$:

لدينا : $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}}\times\ln x dx$

$$\begin{cases} U'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ V(x)=\ln(x) \end{cases} \quad \begin{cases} U(x)=2\sqrt{x} \\ V'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx &= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}2\sqrt{x}\times\frac{1}{x}dx\\ &= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_e^{e^2}-2\int_e^{e^2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx\\ &= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_e^{e^2}-2\left[2\sqrt{x}\right]_e^{e^2}\\ &= \left(2\sqrt{e^2}\ln\left(e^2\right)-2\sqrt{e}\ln e\right)-2\left(2\sqrt{e^2}-2\sqrt{e}\right)\\ &= \left(4e-2\sqrt{e}\right)-2\left(2e-2\sqrt{e}\right)\\ &= 4e-2\sqrt{e}-4e+4\sqrt{e}\\ &= 2\sqrt{e}\end{aligned}$$

6) لنحسب $\int_0^1 x^2e^x dx$:

$$\begin{cases}U'(x)=e^x\\ V(x)=x^2\end{cases} \swarrow\!\!\nearrow \begin{cases}U(x)=e^x\\ V'(x)=2x\end{cases} \updownarrow$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2e^x dx &= \left[x^2e^x\right]_0^1-\int_0^1 2xe^x dx\\ &= \left[x^2e^x\right]_0^1-2\int_0^1 xe^x dx\\ &= e-2\int_0^1 xe^x dx\end{aligned}$$

لنحسب $\int_0^1 xe^x dx$:

$$\begin{cases}h'(x)=e^x\\ g(x)=x\end{cases} \swarrow\!\!\nearrow \begin{cases}h(x)=e^x\\ g'(x)=1\end{cases} \updownarrow$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x dx &= \left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx\\ &= \left[xe^x\right]_0^1-\left[e^x\right]_0^1\\ &= (e-0)-(e-1)=1\end{aligned}$$

و بالتالي : $\int_0^1 x^2e^x dx = e-2$

تصحيح التمرين 6

(1

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 |f(x)|dx.(U.A) \\ &= \int_1^4 \left|\frac{2}{x}\right|dx.(U.A) \\ &= \int_1^4 \frac{2}{x}dx.(U.A) \\ &= 2\int_1^4 \frac{1}{x}dx.(U.A) \\ &= 2[\ln x]_1^4.(U.A) \\ &= 2(\ln(4)-\ln(1)).(U.A) \\ &= 2\ln(4).(U.A) \end{aligned}$$

(2

$$\begin{aligned} A &= \int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)|dx.\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\| \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1-e^x|dx.2cm.2cm \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^x-1)dx.4cm^2 \\ &= [e^x-x]_{\ln 2}^{\ln 4}.4cm^2 \\ &= ((4-\ln 4)-(2-\ln 2)).4cm^2 \\ &= (2-\ln 2).4cm^2 \\ &= (8-4\ln(2))cm^2 \end{aligned}$$

(3

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 |f(x)|dx.\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\| \\ &= \int_1^3 |x^2-2x|dx.1cm.1cm \\ &= \left(\int_1^2 |x^2-2x|dx + \int_2^3 |x^2-2x|.dx\right)cm^2 \\ &= \left(\int_1^2 (2x-x^2)dx + \int_2^3 (x^2-2x).dx\right)cm^2 \\ &= \left(\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3\right)cm^2 \\ &= \left(\left(4-\frac{8}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)+(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right)cm^2 \\ &= 2cm^2 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\ln 2} \left|f(x)-g(x)\right| dx . \|\vec{i}\| . \|\vec{j}\| \\ &= \int_0^{\ln 2} \left|\frac{2e^x}{e^x+1}\right| dx .2cm.3cm \\ &= \int_0^{\ln 2} \left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right) dx .6cm^2 \\ &= 2\int_0^{\ln 2} \left(\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\right) dx .6cm^2 \\ &= 12.\left[\ln\left|e^x+1\right|\right]_0^{\ln 2} .cm^2 \\ &= 12\left(\ln(3)-\ln(2)\right).cm^2 \\ &= 12\ln\left(\frac{3}{2}\right) cm^2 \end{aligned}$$

تصحيح التمرين 7:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi f^2(x) dx .(U.V) \\ &= \pi \int_0^1 x\left(e^x-1\right) dx . \\ &= \pi \int_0^1 \left(xe^x - x\right) dx .(U.V) \\ &= \pi \left(\int_0^1 xe^x dx - \int_0^1 x dx\right).(U.V) \\ &= \pi \left(1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right).(U.V) \\ &= \pi \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)\right).(U.V) \\ &= \frac{\pi}{2}(U.V) \end{aligned}$$

(بالنسبة للتكامل $\int_0^1 xe^x dx$ انظر تصحيح التمرين 5 السؤال 6 باستعمال مكاملة بالأجزاء : $\int_0^1 xe^x dx = 1$)

تصحيح التمرين 8:

1)

$$\int_1^2\left(x^4-\frac{1}{4}x^3+2x-5-\frac{1}{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx \quad =\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{16}+x^2-5x+8\sqrt{x}\right]_1^2$$

$$=8\sqrt{2}-\ln(2)-\frac{379}{80}$$

2)

$$\int_0^1 3x\left(x^2-1\right)^4dx \quad =\frac{3}{2}\int_0^1 2x\left(x^2-1\right)^4dx$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1\left(x^2-1\right)'\left(x^2-1\right)^4dx$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{\left(x^2-1\right)^5}{5}\right]_0^1$$

$$=\frac{3}{10}$$

3)

$$\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx \quad =\frac{1}{3}\int_0^1\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\left(x^3+1\right)'}{\sqrt{x^3+1}}dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[2\sqrt{x^3+1}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-2\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt[3]{x^6+1}}dx = \frac{1}{6}\int_0^1 6x^5\left(x^6+1\right)^{\frac{-1}{3}}dx$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^1 \left(x^6+1\right)'\left(x^6+1\right)^{\frac{-1}{3}}dx$$
$$= \frac{1}{6}\left[\frac{\left(x^6+1\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{6}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(x^6+1\right)^2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}-\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt[3]{4}-1}{4}$$

(5
$$\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}dx = \int_1^e \ln'(x)\ln^2(x)dx = \left[\frac{\ln^3(x)}{3}\right]_1^e = \frac{1}{3}$$

(6
$$\int_2^3 \frac{x^3}{\left(x^4-1\right)^2}dx = \frac{1}{4}\int_2^3 \frac{4x^3}{\left(x^4-1\right)^2}dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_2^3 \frac{\left(x^4-1\right)'}{\left(x^4-1\right)^2}dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{x^4-1}\right]_2^3$$
$$= \frac{19}{960}$$

(7
$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int_1^4 \left(\sqrt{x}\right)'.e^{\sqrt{x}}dx = 2\left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = 2\left(e^2-e\right)$$

(8

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+3}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+4}{x^2+4x+3}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(x^2+4x+3\right)'}{x^2+4x+3}dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+4x+3\right|\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln 8 - \ln 3\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{3}\right)$$

تصحيح التمرين 9:

1) لنحسب : $\int_0^1 (x+2)e^{-x}dx$

$$\begin{cases} U'(x) = e^{-x} \\ V(x) = x+2 \end{cases} \quad \swarrow\!\!\nearrow \quad \begin{cases} U(x) = -e^{-x} \\ V'(x) = 1 \end{cases} \updownarrow$$

$$\int_0^1 (x+2)e^{-x}dx = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx$$
$$= \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^1 - \left[-e^{-x}\right]_0^1$$
$$= \left(-3e^{-1}\right) - (-2) - \left(e^{-1} - 1\right)$$
$$= 3 - 4e^{-1}$$

2) لنحسب : $\int_0^1 x\ln(x+3)dx$

$$\begin{cases} U'(x) = x \\ V(x) = \ln(x+3) \end{cases} \quad \swarrow\!\!\nearrow \quad \begin{cases} U(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ V'(x) = \dfrac{1}{x+3} \end{cases} \updownarrow$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\ln(x+3)dx &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+3)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+3}dx\\ &= \left(\frac{1}{2}\ln 4\right) - (0) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2-3^2+3^2}{x+3}dx\\ &= \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x-3)(x+3)+9}{x+3}dx\\ &= \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x-3+\frac{9(x+3)'}{x+3}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-3x+9\ln|x+3|\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\ln 4 - \left(\left(\frac{-5}{2}+9\ln 4\right) - (9\ln 3)\right)\\ &= \frac{5}{4} - 4\ln 4 + \frac{9}{2}\ln 3\end{aligned}$$

(3

أ) ليكن x من $\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$

$$\begin{aligned}\frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2-1} &= \frac{-(x^2-1)+x^2}{x(x^2-1)}\\ &= \frac{-x^2+1+x^2}{x(x^2-1)}\end{aligned}$$

إذن : لكل x من $\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$ لدينا : $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2-1}$

ب)

$$\int_2^3 \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}dx = \int_2^3\left(\frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2-1}\right)dx$$

$$= \int_2^3\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2-1}\right)dx$$

$$= \int_2^3\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{2}\times\frac{\left(x^2-1\right)'}{x^2-1}\right)dx$$

$$= \left[-\ln x+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|\right]_2^3$$

$$= \left(-\ln 3+\frac{1}{2}\ln 8\right)-\left(-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3\right)$$

$$= \frac{-3}{2}\ln 3+\frac{5}{2}\ln 2$$

ج) لنحسب : $\int_2^3 \frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}\ln(x)dx$

$$\begin{cases} U'(x)=\dfrac{x}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2} \\ V(x)=\ln(x) \end{cases} \nearrow \begin{cases} U(x)=\dfrac{-1}{2\left(x^2-1\right)} \\ V'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases} \updownarrow$$

$$\int_2^3 \frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}\ln(x)dx = \left[\frac{-1}{2\left(x^2-1\right)}\ln x\right]_2^3-\int_2^3\frac{-1}{2x\left(x^2-1\right)}dx$$

$$= \left(\frac{-1}{16}\ln 3\right)-\left(\frac{-1}{6}\ln 2\right)+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{1}{x\left(x^2-1\right)}dx$$

$$= \frac{-1}{16}\ln 3+\frac{1}{6}\ln 2-\frac{3}{4}\ln 3+\frac{5}{4}\ln 2$$

$$= \frac{17}{12}\ln 2-\frac{13}{16}\ln 3$$

تصحيح التمرين 10:

1) لنحسب $\int_0^1 xe^x dx$:

$$\begin{cases} h'(x)=e^x \\ g(x)=x \end{cases} \quad \begin{cases} h(x)=e^x \\ g'(x)=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x dx &= \left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx \\ &= \left[xe^x\right]_0^1-\left[e^x\right]_0^1 \\ &= (e-0)-(e-1)=1\end{aligned}$$

2) لنحسب $\int_0^1 x^2e^x dx$:

$$\begin{cases} U'(x)=e^x \\ V(x)=x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} U(x)=e^x \\ V'(x)=2x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2e^x dx &= \left[x^2e^x\right]_0^1-\int_0^1 2xe^x dx \\ &= \left[x^2e^x\right]_0^1-2\int_0^1 xe^x dx \\ &= e-2\int_0^1 xe^x dx\end{aligned}$$

و منه : $\int_0^1 x^2e^x dx = e-2$

3)

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 |f(x)|dx \times \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\| \\ &= \int_0^1 (x^2+4x+4)e^x dx \times 1{,}5cm \times 2cm \qquad \left((x^2+4x+4)e^x=(x+2)^2e^x \geq 0\right) \\ &= \left(\int_0^1 x^2e^x dx + 4\int_0^1 xe^x dx + 4\int_0^1 e^x dx\right)\times 3cm^2 \\ &= \left(e-2+4\times1+4\left[e^x\right]_0^1\right)\times 3cm^2 \\ &= \left(e+2+4(e-1)\right)\times 3cm^2 \\ &= =(5e-2)\times 3cm^2 \\ &= (15e-6)cm^2\end{aligned}$$

تصحيح التمرين 11:

(1

✓ الدالة F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

✓ ليكن $x \in]0,+\infty[$:

$$F'(x) = \left(\frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)'$$

$$= -\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)'$$

$$= -\left(\frac{\ln'(x)\times x - \ln(x)\times(x)'}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{1-\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{1-\ln x - 1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$$

إذن لكل x من $]0,+\infty[$:

و بالتالي الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$

(2

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[\frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^4$$

$$= \left(\frac{-\ln 4}{4} - \frac{1}{4}\right) - (0-1)$$

$$\frac{3-\ln 4}{4}$$

تصحيح التمرين 12:

1) لنبين أن الدالة $H : x \mapsto x\ln x - x$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \ln x$ على $]0,+\infty[$

✓ الدالة H قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

✓ ليكن $x \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= (x\ln x - x)' \\ &= (x)'\ln x + x\ln'(x) - 1 \\ &= \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln(x) + 1 - 1 \\ &= \ln x \end{aligned}$$

إذن لكل x من $]0,+\infty[$: $H'(x) = h(x)$

و منه الدالة $H : x \mapsto x\ln x - x$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \ln x$ على $]0,+\infty[$

2)

$$\begin{aligned} \int_1^2 h(x)dx &= \left[H(x)\right]_1^2 \\ &= H(2) - H(1) \\ &= (2\ln 2 - 2) - (1\ln 1 - 1) \\ &= 2\ln 2 - 2 - 0 + 1 \\ & 2\ln 2 - 1 \end{aligned}$$

3) $A = \int_1^2 |h(x)|dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

على المجال $[1,2]$ لدينا : $h(x) = \ln x \geq 0$

إذن : $A = \int_1^2 h(x)dx \times 2cm \times 2cm$

إذن : $A = (2\ln 2 - 1) \times 4cm^2$

و منه : $A = (8\ln 2 - 4)cm^2$

تصحيح التمرين 13:

لنحسب : $\int_2^4 |\ln(x) - 1|dx$:

x	0 $\quad$ e $\quad$ $+\infty$
$ln(x)-1$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

$$\begin{aligned}\int_2^4 |\ln x - 1| dx &= \int_2^e |\ln x - 1| dx + \int_e^4 |\ln x - 1| dx \\ &= \int_2^e (1 - \ln x) dx + \int_e^4 (\ln x - 1) dx \\ &= \left[x - (x\ln x - x)\right]_2^e + \left[(x\ln x - x) - x\right]_e^4 \\ &= \left[2x - x\ln x\right]_2^e + \left[x\ln x - 2x\right]_e^4 \\ &= 2e - 12 + 10\ln 2\end{aligned}$$

(انظر التمرين 12 لدينا الدالة $H : x \mapsto x\ln x - x$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \ln x$ على $]0,+\infty[$)

تصحيح التمرين 14:

(1

- لنحسب : $A = \int_1^2 \left(x^3 - 2x + 3\right) dx$

$$\begin{aligned}A &= \int_1^2 \left(x^3 - 2x + 3\right) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^2 + 3x\right]_1^2 \\ &= (4 - 4 + 6) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 3\right) \\ &= \frac{15}{4}\end{aligned}$$

- لنحسب : $B = \int_0^1 x\left(x^2 + 1\right)^2 dx$

$$\begin{aligned}B &= \int_0^1 x\left(x^2 + 1\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 2x\left(x^2 + 1\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 + 1\right)'\left(x^2 + 1\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2 + 1\right)^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{7}{6}\end{aligned}$$

- لنحسب : $C = \int_0^2 \frac{1}{x + 1} dx$

$$\begin{aligned} C &= \int_0^2 \frac{1}{x+1}dx \\ &= \int_0^2 \frac{(x+1)'}{x+1}dx \\ &= \left[\ln|x+1|\right]_0^2 \\ &= \ln 3 - \ln 1 \\ &= \ln 3 \end{aligned}$$

2) لنحسب : $D = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{|\ln x|}{x}dx$

x	$0 \quad\quad 1 \quad +\infty$
$ln(x)$	$- \quad 0 \quad +$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{|\ln x|}{x}dx &= \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{|\ln x|}{x}dx + \int_1^e \frac{|\ln x|}{x}dx \\ &= \int_{\frac{1}{e}}^{1} -\frac{1}{x}\ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx \\ &= -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln' x \ \ln x dx + \int_1^e \ln' x \ \ln x dx \\ &= -\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e \\ &= -\left(0 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 0\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(3

أ) ليكن $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$\begin{aligned} x - 1 + \frac{1}{x+1} &= \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} \\ &= \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} \\ &= \frac{x^2}{x+1} \end{aligned}$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) : \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

ب) لنحسب $E = \int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx$

$$\begin{aligned} E &= \int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx \\ &= \int_0^2 \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \int_0^2 \left(x-1+\frac{(x+1)'}{x+1}\right)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right]_0^2 \\ &= \ln 3 \end{aligned}$$

ج) لنحسب : $F=\int_0^2 x\ln(x+1)dx$

$$\begin{cases} U(x)=\dfrac{x^2}{2} \\ V'(x)=\dfrac{1}{x+1} \end{cases} \updownarrow \qquad \swarrow\!\!\nearrow \qquad \begin{cases} U'(x)=x \\ V(x)=\ln(x+1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F &= \int_0^2 x\ln(x+1)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{2(x+1)}dx \\ &= \left(2\ln(3)-0\right)-\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx \\ & 2\ln 3-\frac{1}{2}E \\ &= 2\ln 3-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{3}{2}\ln 3 \end{aligned}$$